تعریف توان: برای نمایش ساده‌تر حاصل‌ضرب عددی مانند a به تعداد n بار در خودش از مفهوم توان به‌صورت زیر استفاده می‌کنند.

مثال تساوی‌ها را به شکل توان بنویسید

الف) $\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ بار}}=a^n$ ب) $\underbrace{5\times5\times\ldots\times5}_{7\text{ بار}}=5^7$

توان منفی

جدول زیر را در نظر بگیرید

$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۸	۱۶
2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4

دیده می‌شود از چپ به راست که حرکت می‌کنیم در سطر اول حاصل هر خانه به عدد ۲ تقسیم می‌شود و عدد خانهٔ بعدی را تولید می‌کند و به‌همین ترتیب در سطر دوم از هر خانه به خانهٔ بعدی یک واحد از توان کم می‌شود. پس برای نمایش $\frac{1}{2}$ می‌توان از 2^{-1} یا برای نمایش $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ از 2^{-2} و همچنین برای نمایش $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$ از 2^{-3} استفاده کرد بنابراین توان هم می‌تواند منفی باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود

به طور کلی اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد داریم:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ ,\ a\neq0\ ,\ n\in N$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

ب) $(-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-27}=-\frac{1}{27}$

پ) $(\frac{1}{4})^{-2}=\frac{1}{(\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$

ت) $(\frac{3}{2})^{-4}=\frac{1}{(\frac{3}{2})^4}=\frac{1}{\frac{81}{16}}=\frac{16}{81}$

هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر یک است یعنی اگر a عددی غیر صفر باشد داریم:

$$a^0=1$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $5^0=1$

ب) $(-4)^0=1$

پ) $(\frac{3}{2})^0=1$

اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد داریم:

$$(\frac{a}{b})^{-n}=(\frac{b}{a})^n$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را با توان مثبت بیابید

الف) $(\frac{5}{4})^{-6}=(\frac{4}{5})^6$

ب) $(\frac{1}{7})^{-2}=(\frac{7}{1})^2=7^2$

پ) $5^{-4}=(\frac{5}{1})^{-4}=(\frac{1}{5})^4$

ت) $(-6)^{-3}=(\frac{1}{-6})^3=(-\frac{1}{6})^2$

اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ باشد، آن‌گاه

$$a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $4^0 - 4^{-1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

ب) $(\frac{2}{3})^{-1} + (\frac{2}{3})^3 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{12+8}{27} = \frac{20}{27}$

پ) $-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$

ت) $3^{-1} + 2^{-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$

ث) $-(-2)^{-3} = -\frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{-8} = +\frac{1}{8}$

ج) $-\frac{1}{2^{-3}} + \frac{2}{5^{-2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2^3}} + \frac{2}{\frac{1}{5^2}} = -\frac{1}{\frac{1}{8}} + \frac{2}{\frac{1}{25}} = -8 + 2 \times 25 = 42$

قوانین محاسبه اعداد توان‌دار

۱- در ضرب اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها مساوی باشند، یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

اثبات: $a^m \times a^n = \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{m \text{ بار}} \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{n \text{ بار}} = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{m+n \text{ بار}} = a^{m+n}$

مثال۱ حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $4^2 \times 4^7 = 4^{2+7} = 4^9$

ب) $(\frac{5}{2})^3 \times (\frac{5}{2})^6 = (\frac{5}{2})^{3+6} = (\frac{5}{2})^9$

پ) $5^{-4} \times 5^{-9} = \frac{1}{5^4} \times \frac{1}{5^9} = \frac{1}{5^4 \times 5^9} = \frac{1}{5^{4+9}} = \frac{1}{5^{13}} = 5^{-13}$

مثال۲ حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $9^{-2} \times 9^{-4} = 9^{-6}$

ب) $6^{-3} \times 6^7 = 6^{-3+7} = 6^4$

پ) $a^{-2} \times a^7 = a^{-2+7} = a^5$

ت) $2^{-6} \times 2^4 = 3^{-6+4} = 3^{-2}$

ث) $(-\frac{6}{7})^9 \times (-\frac{6}{7})^{-12} = (-\frac{6}{7})^{9-12} = (-\frac{6}{7})^{-3}$

۲- در ضرب اعداد توان‌دار اگر توان‌ها مساوی باشند، یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

مثال حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $5^7 \times 2^7 = (5 \times 2)^7 = 10^7$

ب) $(-3)^4 \times 7^4 = (-3 \times 7)^4 = (-21)^4$

پ) $(-\frac{3}{4})^{-5} \times (8)^{-5} = (-\frac{3}{4} \times 8)^{-5} = (-6)^{-5} = (-\frac{1}{6})^5$

۳- در تقسیم اعداد توان‌دار اگر پایه‌ها مساوی باشند، یکی از پایه‌ها را نوشته و توان دومی را از توان اولی کم می‌کنیم

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad a \neq 0$$

مثال حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\frac{(xy)^2}{(xy)^{-2}} = (xy)^{2-(-2)} = (xy)^4$

ب) $\frac{(-6)^{12}}{(-6)^5} = (-6)^{12-5} = (-6)^7$

پ) $\frac{5^{-9}}{5^4} = 5^{-9-4} = 5^{-13}$

ت) $7^9 \div 7^2 = 7^{9-2} = 7^5$

۴- در تقسیم اعداد توان‌دار اگر توان‌ها برابر باشند، یکی از توان‌ها را نوشته و پایه اولی را بر پایه دومی تقسیم می‌کنیم

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m \quad , \quad b \neq 0$$

مثال۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $20^2 \div 2^2 = (\frac{20}{2})^2 = 10^2$

ب) $\frac{24^5}{8^5} = (\frac{24}{8})^5 = 3^5$

پ) $\frac{16^{-5}}{10^{-5}} = (\frac{16}{10})^{-5} = (\frac{8}{5})^{-5} = (\frac{5}{8})^5$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\frac{5^{-7} \times 5^2}{5^{-9} \times 5^{13}} = \frac{5^{-7+2}}{5^{-9+13}} = \frac{5^{-3}}{5^4} = 5^{-3-4} = 5^{-7}$

ب) $(\frac{2}{3})^8 \times 6^8 \times 2^8 = (\frac{2}{3} \times 6 \times 2)^8 = (2 \times 2 \times 2)^8 = 8^8$

ب) $7^{11} \div (2\frac{1}{3})^{11} = 7^{11} \div (\frac{7}{3})^{11} = (\frac{7}{\frac{7}{3}})^{11} = (\frac{3 \times 7}{7})^{11} = 3^{11}$

ت) $(2/5)^3 \times (\frac{5}{2})^4 \times (\frac{2}{5})^9 = (2/5)^3 \times (\frac{5}{2})^4 \times (\frac{5}{2})^{-9} = (2/5)^3 \times (2/5)^4 \times (2/5)^{-9} = (2/5)^{3+4-9} = (2/5)^{-2}$

ث) $\frac{12^{12} \times 3^2}{3^{10} \times 12^5} = \frac{12^{12}}{12^5} \times \frac{3^2}{3^{10}} = 12^{12-5} \times 3^{2-10} = 12^7 \times 3^{-7} = 12^7 \times (\frac{1}{3})^7 = (12 \times \frac{1}{3})^7 = (\frac{12}{3})^7 = 4^7$

ج) $\frac{(8^7 \times 3^7) \div 24^2}{(2^3 \div 0/25^3) \times 4^2} = \frac{(8 \times 3)^7 \div 24^2}{(\frac{2}{0/25})^3 \times 2^2} = \frac{24^7 \div 24^2}{(\frac{2}{\frac{1}{4}})^3 \times 2^2} = \frac{24^{7-2}}{(2 \times 4)^3 \times 2^2} = \frac{24^5}{8^3 \times 2^3} = \frac{24^5}{24^3} = 24^{5-3} = 24^2$

قوانین ضرب و تقسیم زمانی که توان منفی باشد هم صحیح می‌باشد.

اگر عدد منفی به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی است و اگر عدد منفی به توان زوج برسد، حاصل مثبت است.

بر پو رابطهٔ مقابل $a > 0$ می‌باشد.

n: زوج $\rightarrow (-a)^n = a^n$

n: فرد $\rightarrow (-a)^n = -a^n$

مثال۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید.

الف) $(-2)^3 = -2^3 = -8$

ب) $(-2)^4 = 16 = 2^4$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید

الف) $\frac{(-۳)^{۱۱}\times ۳^{۴}}{۳^{۵}\times(-۳)^{۱۲}}=\frac{-۳^{۱۱}\times ۳^{۴}}{۳^{۵}\times ۳^{۱۲}}=\frac{-۳^{۱۵}}{۳^{۱۷}}=-۳^{۱۵-۱۷}=-۳^{-۲}$

ب) $(-۵)^{۲}\times ۵^{۱۴}\times(-۵)^{-۱۳}=۵^{۲}\times ۵^{۱۴}\times\frac{۱}{(-۵)^{۱۳}}=\frac{۵^{۱۶}}{-۵^{۱۳}}=-\frac{۵^{۱۶}}{۵^{۱۲}}=-۵^{۱۶-۱۲}=-۵^{۴}$

مثال۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید

الف) در عبارت الف عدد ۳ به‌عنوان توان ۲ می‌باشد. پس داریم $۵^{۲^{۲}}=۵^{۲\times ۲\times ۲}=۵^{۸}$

ب) در عبارت ب عدد ۳ به‌عنوان توان $۵^{۲}$ می‌باشد. پس داریم $(۵^{۲})^{۳}=۵^{۲}\times ۵^{۲}\times ۵^{۲}=۵^{۲+۲+۲}=۵^{۳\times ۲}=۵^{۶}$

توان یک توان

برای محاسبهٔ توان یک عدد توان‌دار از فرمول زیر استفاده می‌کنیم و فرمول زیر هم برای توان منفی صحیح می‌باشد.

$$(a^{n})^{m}=a^{n\cdot m}$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید

الف) $(۴^{۳})^{۵}=۴^{۳\times ۵}=۴^{۱۵}$ ب) $(۵^{-۲})^{۳}=۵^{-۲\times ۳}=۵^{-۶}$ پ) $(-۳^{-۲})^{-۴}\times(-۴)^{۱۲}=۶^{۱۲}$

عبارت $(a^{n})^{m}$ با عبارت $a^{n^{m}}$ برابر نیست.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید

الف) $\frac{(۳^{۲})^{۷}}{(۳^{-۳})^{۵}}=\frac{۳^{۱۴}}{۳^{-۱۵}}=۳^{۱۴-(-۱۵)}=۳^{۱۴+۱۵}=۳^{۲۹}$ ب) $\frac{۵^{۲^{۴}}\times ۵^{-۶}}{(۵^{-۲})^{-۳}}=\frac{۵^{۱۶}\times ۵^{-۶}}{۵^{۶}}=\frac{۵^{۱۰}}{۵^{۶}}=۵^{۴}$

در جمع و تفریق اعداد توان‌دار قانونی وجود ندارد جز این‌که باید حاصل اعداد توان‌دار را یافته و حاصل آن‌ها را با هم جمع و تفریق کنیم.

مثال حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید

الف) $۳^{۲}+۵^{۲}=۹+۲۵=۳۴$ ب) $۵^{۳}-۵^{۲}+۵^{۰}=۱۲۵-۲۵+۱=۱۰۱$

بعضی از جمع و تفریق‌های خاص از اعداد توان‌دار وجود دارند که می‌توان با قوانین جبری آن‌ها را ساده‌تر کرد. قبل از پرداختن به چند مثال یادآوری می‌کنیم که به‌عنوان نمونه عبارت $x+x+x+x$ را به‌صورت $۴x$ یا $a+a+a$ را به‌صورت $۳a$ نشان می‌دهیم.

مثال۱ حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید

الف) $۲^{۹۹}+۲^{۹۹}=۲\times ۲^{۹۹}=۲^{۱۰۰}$

ب) $۵^{۱۴}+۵^{۱۴}+۵^{۱۴}+۵^{۱۴}+۵^{۱۴}=۵\times ۵^{۱۴}=۵^{۱۵}$

پ) $۲۷^{۱۱}+۲۷^{۱۱}+۲۷^{۱۱}=۳\times ۲۷^{۱۱}=۳\times(۳^{۳})^{۱۱}=۳\times ۳^{۳۳}=۳^{۳۴}$

ت) $۱۵\times ۵^{۱۰}+۱۰\times ۵^{۱۰}=(۱۵+۱۰)\times ۵^{۱۰}=۲۵\times ۵^{۱۰}=۵^{۲}\times ۵^{۱۰}=۵^{۱۲}$

مثال ۲ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $۲\times(-۱)^{۱۱}+۴۰^{۰}=۲\times(-۱)+۱=-۲+۱=-۱$

ب) $۴\left[۳\times(\frac{۱}{۲})^{۲}\right]^{۲}=۴\times۳^{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۴}=۲^{۲}\times۳^{۲}\times\frac{۱}{۲^{۴}}=\frac{۲^{۲}\times۳^{۲}}{۲^{۴}}=\frac{۳^{۲}}{۲^{۲}}$

پ) $\frac{۱۱\times۹^{-۵}-۸\times۹^{-۵}}{۲\times۳^{-۲}+۵\times۳^{-۷}}=\frac{۹^{-۵}\times(۱۱-۸)}{۳^{-۲}\times(۴+۵)}=\frac{۹^{-۵}\times۳}{۳^{-۷}\times۹}=\frac{(۳^{۲})^{-۵}\times۳}{۳^{-۷}\times۳^{۲}}=\frac{۳^{-۱۰}\times۳}{۳^{-۷}\times۳^{۲}}=\frac{۳^{-۹}}{۳^{-۵}}=۳^{-۹-(-۵)}=۳^{-۹+۵}=۳^{-۴}=(\frac{۱}{۳})^{۴}$

ت) $\left[۲۵^{۸}\times(۱۵^{۲})^{-۵}\right]+۲۵^{-۱}=\left[(۳\times۱۵)^{۸}\times۱۵^{-۱۰}\right]+\frac{۱}{۲۵}=\left[۳^{۸}\times۱۵^{۸}\times۱۵^{-۱۰}\right]\times۲۵=۳^{۸}\times۱۵^{-۲}\times۵^{۲}=۳^{۸}\times(۳\times۵)^{-۲}\times۵^{۲}=$

$۳^{۸}\times۳^{-۲}\times۵^{-۲}\times۵^{۲}=۳^{۶}\times۵^{۰}=۳^{۶}\times۱=۳^{۶}$

مثال ۳ اگر $a=۵^{n+۲}$ و $b=۵^{n}$ باشند، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

پاسخ $\frac{a}{b}=\frac{۵^{n+۲}}{۵^{n}}=۵^{n+۲-n}=۵^{۲}=۲۵\Rightarrow\frac{a}{b}=۲۵\Rightarrow a=۲۵b$

مثال ۴ اگر $A=۵^{۲x+۲}$ و $B=۲۵^{x+۲}$ باشند، چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است؟

پاسخ $\frac{A}{B}=\frac{۵^{۲x+۲}}{۲۵^{x+۲}}=\frac{۵^{۲x+۲}}{(۵^{۲})^{x+۲}}=\frac{۵^{۲x+۲}}{۵^{۲x+۴}}=۵^{۲x+۲-(۲x+۴)}=۵^{۲x+۲-۲x-۴}=۵^{-۲}=\frac{۱}{۵^{۲}}=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow B=۲۵A$

معادلات توانی

هر معادله‌ای که مجهول آن در توان قرار گرفته باشد معادلهٔ توانی نامیده می‌شود. برای حل این معادله‌ها ابتدا پایه‌ها را در دو طرف تساوی یکسان می‌کنیم. سپس از این خاصیت استفاده می‌کنیم که اگر دو عبارت توان‌دار با پایه‌های یکسان برابر باشند باید توان‌های آن‌ها نیز برابر باشند.

یعنی $a\neq۰,۱,-۱\Rightarrow a^{n}=a^{m}\Leftrightarrow n=m$ (در صورتی‌که پایه صفر یا ۱ یا ۱- نباشد)

مثال معادله‌های توانی زیر را حل کنید.

الف) $۵^{۲x-۱}=۵^{۲}\Rightarrow ۲x-۱=۲\Rightarrow ۲x=۸\Rightarrow x=۴$

ب) $۷^{۹x-۱۸}=۱\Rightarrow ۷^{۹x-۱۸}=۷^{۰}\Rightarrow ۹x-۱۸=۰\Rightarrow ۹x=۱۸\Rightarrow x=۲$

پ) $۹^{x-۱}=۳^{x+۱}\Rightarrow (۳^{۲})^{x-۱}=۳^{x+۱}\Rightarrow ۳^{۲x-۲}=۳^{x+۱}\Rightarrow ۲x-۲=x+۱\Rightarrow ۲x-x=۲+۱\Rightarrow x=۳$

ت) $(۰/۲)^{۲-x}=۱۲۵\Rightarrow(\frac{۲}{۱۰})^{۲-x}=۵^{۳}\Rightarrow(\frac{۱۰}{۲})^{-(۲-x)}=۵^{۳}\Rightarrow ۵^{-۲+x}=۵^{۳}\Rightarrow -۲+x=۳\Rightarrow x=۲+۳=۵$

ث) $۳^{x}+۳^{x+۱}=۳۶\Rightarrow ۳^{x}+۳^{x}\times۳^{۱}=۳۶\Rightarrow ۳^{x}\times(۱+۳)=۳۶\Rightarrow ۳^{x}\times۴=۳۶\Rightarrow\frac{۳^{x}\times۴}{۴}=\frac{۳۶}{۴}\Rightarrow ۳^{x}=۹=۳^{۲}\Rightarrow x=۲$

ج) $(۳^{x+۳})^{۲}=۳^{x-۱۱}\Rightarrow ۳^{۲x+۶}=۳^{x-۱۱}\Rightarrow ۲x+۶=x-۱۱\Rightarrow ۲x-x=-۶-۱۱\Rightarrow x=-۱۷$

می‌دانیم تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر با ۲^{n} می‌باشد. حال می‌توانیم بعضی مسایل مربوط به تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه را حل کنیم.

مثال ۱ اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۳$ عضوی ۳۲ برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ ۷ عضوی باشد، n را بیابید.

تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۳$ عضوی برابر با $۲^{n+۳}$ و تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ ۷ عضوی برابر با $۲^{۷}$ می‌باشد. پس داریم:

$۲^{n+۳}=۳۲\times۲^{۷}\Rightarrow ۲^{n+۳}=۲^{۵}\times۲^{۷}=۲^{۱۲}\Rightarrow n+۳=۱۲\Rightarrow n=۹$

مثال۲ یک مجموعه $2k-1$ عضوی ۱۲۸ زیر مجموعه دارد. k را بیابید.

می‌دانیم: $128 = 2^7$

$$2^{2k-1} = 128 = 2^7 \Rightarrow 2k-1=7 \Rightarrow 2k=8 \Rightarrow k=4$$

مثال۳ تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $k+3$ عضوی ۱۱۲ واحد از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه k عضوی بیش‌تر است. k را بیابید.

$$2^{k+3} = 2^k + 112 \Rightarrow 2^{k+3} - 2^k = 112 \Rightarrow 2^k \times 2^3 - 2^k \times 1 = 112 \Rightarrow 2^k \times (2^3 - 1) = 112 \Rightarrow 2^k \times 7 = 112 \Rightarrow$$

$$\frac{2^k \times 7}{7} = \frac{112}{7} \Rightarrow 2^k = 16 \Rightarrow 2^k = 2^4 \Rightarrow k=4$$

در تساوی دو عبارت توان‌دار با توان‌های برابر یعنی $a^n = b^n$ با توجه به زوج یا فرد بودن توان n دو حالت داریم:

الف) n فرد و $a^n = b^n \Rightarrow a=b$ ب) n زوج، $a^n = b^n \Rightarrow a = \pm b$ مثال: $2^4 = (-2)^4 = +16$

مثال در هر کدام از موارد زیر مقدار x را بیابید.

الف) $(2x-1)^5 = (x+1)^5$ ب) $(3x+2)^6 = (x-4)^6$

الف) $(2x-1)^5 = (x+1)^5 \Rightarrow 2x-1=x+1 \Rightarrow 2x-x=1+1 \Rightarrow x=2$

ب) $(3x+2)^6 = (x-4)^6 \Rightarrow 3x+2 = \pm(x-4)$

$$\begin{cases} 3x+2 = x-4 \Rightarrow 3x-x = -4-2 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3 \\ 3x+2 = -(x-4) = -x+4 \Rightarrow 3x+x = 4-2 \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

نماد علمی

برای نوشتن اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچک و برای راحتی در محاسبه‌ها با این اعداد، آن‌ها را به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد بین ۱ و ۱۰ یا خود یک در توانی از ۱۰ نمایش می‌دهند. یعنی به‌صورت $a \times 10^n$ که $1 \le a < 10$ و $n \in Z$ می‌باشند که به آن نماد علمی می‌گویند.

مثال۱ حاصل اعداد زیر را به‌صورت نماد علمی بنویسید.

الف) $7\underbrace{4000000}_{\text{۹ رقم}} = 7/4 \times 10^9$ ب) $0/\underbrace{00000007}_{\text{۸ رقم}}3 = 7/3 \times 10^{-8}$

مثال۲ حاصل اعداد زیر را به‌صورت نماد علمی بنویسید.

الف) $76500000 = 7/65 \times 10^7$ ب) $0/0004112 = 4/112 \times 10^{-5}$

ب) $12 \times 0/0003 = 12 \times 3 \times 10^{-5} = 36 \times 10^{-5} = 3/6 \times 10 \times 10^{-5} = 3/6 \times 10^{-4}$

پ) $0/00032 \times 10000 \times 500 \times 100 = 3/2 \times 10^{-6} \times 10^4 \times 5 \times 10^2 \times 10^2 = 3/2 \times 5 \times 10^{-6+4+2+2} = 16 \times 10^4 =$

$1/6 \times 10 \times 10^3 = 1/6 \times 10^4$

ت) $0/0081 \times 2500 \times 10000 \times 49 \times 1000 = 8/1 \times 10^{-3} \times 2/5 \times 10^3 \times 10^4 \times 49 \times 10^3 = 8/1 \times 2/5 \times 49 \times 10^{-3+3+4+3} =$

$9923/25 \times 10^7 = 9/9225 \times 10^3 \times 10^7 = 9/9225 \times 10^9$

ج) $\frac{0/0000049 \times 0/008}{4900 \times 0/08} = \frac{4/9 \times 10^{-5} \times 8 \times 10^{-3}}{4/9 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-2}} = \frac{10^{-8}}{10} = 10^{-8-1} = 10^{-9}$

ج) $\frac{۰/۰۰۰۳\times۰/۰۰۰۰۶\times۱۰^{۶}\times۷۰۰۰۰۰}{۱۸۰۰۰\times۱۰^{۱۲}\times۰/۰۰۰۷\times۰/۰۰۵}=\frac{۳\times۱۰^{-۴}\times۶\times۱۰^{-۵}\times۱۰^{۶}\times۷\times۱۰^{۵}}{۱/۸\times۱۰^{۴}\times۱۰^{۱۲}\times۷\times۱۰^{-۴}\times۵\times۱۰^{-۳}}=\frac{۳\times۶\times۷\times۱۰^{-۴-۵+۶+۵}}{۱/۸\times۷\times۵\times۱۰^{۴+۱۲-۴-۳}}=$

$\frac{۱۸\times۱۰^{۲}}{۱/۸\times۵\times۱۰^{۹}}=\frac{۱/۸\times۱۰^{۲}\times۱۰^{۲}}{۱/۸\times۵\times۱۰^{۹}}=۲\times۱۰^{۲-۹}=۲\times۱۰^{-۷}$

مثال ۳ سرعت نور ۳۰۰۰۰۰۰۰۰ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در ۵۰۰ ساعت می‌پیماید چند متر است؟ جواب را به‌صورت تعداد علمی بنویسید.

۵۰۰ ساعت $\Rightarrow ۵۰۰\times۶۰\times۶۰=۱۸۰۰۰۰۰=۱/۸\times۱۰^{۶}$ ثانیه و سرعت نور $=۳۰۰۰۰۰۰۰۰=۳\times۱۰^{۸}\ m/sec$

$\frac{۳\times۱۰^{۸}}{x}=\frac{۱}{۱/۸\times۱۰^{۶}}\Rightarrow x=۳\times۱۰^{۸}\times۱/۸\times۱۰^{۶}=۵/۴\times۱۰^{۱۴}$ متر

ریشه‌گیری

مربع (توان دوم) دو عدد ۵ و ۵- برابر ۲۵ است. یعنی: $۵^{۲}=(-۵)^{۲}=۲۵$ به همین دلیل دو عدد ۵ و ۵- را ریشه‌های دوم عدد ۲۵ می‌گویند و با نمادهای $\sqrt{۲۵}$ و $-\sqrt{۲۵}$ نمایش می‌دهند. یعنی: $\sqrt{۲۵}=۵$ ، $-\sqrt{۲۵}=-۵$

ریشه‌های دوم عدد $\frac{۸۱}{۴}$ اعداد $\frac{۹}{۲}$ و $-\frac{۹}{۲}$ هستند. یعنی: $\sqrt{\frac{۸۱}{۴}}=\frac{۹}{۲}$ ، $-\sqrt{\frac{۸۱}{۴}}=-\frac{۹}{۲}$

ریشه‌های دوم عدد ۵ اعداد $\sqrt{۵}$ و $-\sqrt{۵}$ هستند.

به‌طور کلی اگر b یک عدد مثبت باشد $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم عدد b می‌نامند.

از آنجائی‌که هر عدد حقیقی به توان دو، عدد مثبت تولید می‌کند به‌همین دلیل اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند. به‌عنوان مثال ۳۶- ریشهٔ دوم ندارد زیرا هیچ عدد حقیقی به توان دو ۳۶- تولید نمی‌کند. فقط دقت کنید که توان دوم ۶ و ۶- عدد ۳۶+ است. $+۳۶=۶^{۲}$ و $+۳۶=(-۶)^{۲}$ یعنی $\sqrt{-۳۶}$ و مشابه آن عبارت‌های بی‌معنی هستند.

مثال ۱ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{(-۵)^{۲}}$ ب) $(\sqrt{-۵})^{۲}$

در عبارت $\sqrt{(-۵)^{۲}}$ ابتدا باید توان ۲ محاسبه شود سپس از حاصل آن ریشهٔ دوم یعنی رادیکال گرفته شود پس داریم: $\sqrt{(-۵)^{۲}}=\sqrt{+۲۵}=۵$

در عبارت $(\sqrt{-۵})^{۲}$ اولویت با رادیکال است، سپس توان ۲ محاسبه می‌شود بنابراین ابتدا باید $\sqrt{-۵}$ محاسبه شود که این عبارت بی‌معنی است و عبارت بی‌معنی را نمی‌توان به توان ۲ رساند پس در کل عبارت $(\sqrt{-۵})^{۲}$ بی‌معنی است.

نتیجه: در $\sqrt{b}$ عبارت داخل رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یعنی $b\geq ۰$

مثال ۲ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{۴۰۰}-\sqrt{۱۰۰}=۲۰-۱۰=۱۰$

ب) $\sqrt{-(-۷)^{۲}}=\sqrt{-(+۴۹)}=\sqrt{-۴۹}=$ بی‌معنی

پ) $-\sqrt{(-۳)^{۲}}+\sqrt{(-۴)^{۲}}=-\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}=-۳+۴=۱$

ت) $\sqrt{\frac{۳۶}{۴۹}}+\sqrt{(۱۰۰)^{-۱}}=\sqrt{\frac{۳۶}{۴۹}}+\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}=\frac{۶}{۷}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۶۰+۷}{۷۰}=\frac{۶۷}{۷۰}$

ث) $۲\sqrt{۰/۱۶}+\sqrt{۰/۸۱}=۲\sqrt{\frac{۱۶}{۱۰۰}}+\sqrt{\frac{۸۱}{۱۰۰}}=۲\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۹}{۱۰}=۰/۸+۰/۹=۱/۷$

ج) $\sqrt{۱\frac{۹}{۱۶}}-\sqrt{\frac{۹}{۱۶}}+\sqrt{\frac{۹}{۴}}-۵\sqrt{\frac{۱}{۹}}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}-\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۲}-۵\times\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۴}-\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۲}-\frac{۵}{۳}=\frac{۱۵-۹+۱۸-۲۰}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

در فصل دوم یاد گرفتیم که $\sqrt{x^2} = |x|$ از این نکته برای محاسبهٔ بعضی رادیکال‌ها می‌توان استفاده کرد.

مثال

الف) $\sqrt{(-40)^2} = |-40| = +40$

ب) $\sqrt{(6-9)^2} = |6-9| = |-3| = +3$

ریشه سوم (فرجه سوم)

می‌دانیم $2^3 = 8$، عدد ۲ را ریشهٔ سوم عدد ۸ می‌گویند و به‌صورت $\sqrt[3]{8}$ نشان می‌دهند یعنی

مثال

الف) $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

ب) $3^3 = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$

همچنین $(-2)^3 = -8$ بنابراین ریشهٔ سوم ۸- عدد ۲- است یعنی

الف) $(-2)^3 = -8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$

ب) $(-3)^3 = -27 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$

برخلاف اعداد مثبت که فقط ریشهٔ دوم دارند اعداد منفی ریشهٔ سوم دارند و دیگر این‌که هر عدد مثبت دو تا ریشهٔ دوم دارد اما هر عدد منفی یا مثبت فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

به‌طورکلی اگر $a^3 = b$ باشد ریشهٔ سوم عدد b همان a است و به‌صورت $\sqrt[3]{b} = a$ نمایش می‌دهند به عنوان نمونه داریم:

الف) $5^3 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

ب) $(-4)^3 = -64 \Rightarrow \sqrt[3]{-64} = -4$

در حالت کلی داریم $\sqrt[3]{a^3} = a$ و برخلاف فرجهٔ دوم نیازی به قدر مطلق نیست.

مثال۱ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[3]{7^3} = 7$

ب) $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

پ) $-\sqrt[3]{(-5)^3} = -(-5) = 5$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{125} = 2 - 5 = -3$

ب) $-\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{64} = -(-3) + 4 = 3 + 4 = 7$

پ) $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{-\frac{27}{1000}} = -\frac{1}{2} + (-\frac{3}{10}) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{-5-3}{10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$

ب) $\sqrt[3]{(-7)^3} + \sqrt[3]{1000} = -7 + \sqrt[3]{10^3} = -7 + 10 = 3$

ریشه nام یک عدد (فرجه nام)

در حالت کلی اگر $a^n = b$ باشد، در این‌صورت عدد a را ریشهٔ nام عدد b می‌گویند و می‌نویسیم:

$\sqrt[n]{b} = a$ (ریشهٔ nام یا فرجهٔ nام عدد b برابر a است)

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $3^4 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{16} = 2$

ب) $2^5 = 32 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = 2$

پ) $(-3)^5 = -243 \Rightarrow \sqrt[5]{-243} = -3$

در حالتی‌که n یعنی فرجهٔ رادیکال زوج باشد باید داخل رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. به بیان دیگر اعداد منفی فرجهٔ زوج ندارند. به‌عنوان مثال $\sqrt[4]{-16}$ عبارت بی‌معنی است. زیرا هیچ عددی وجود ندارد که به توان ۴ برسد و حاصل آن عدد منفی باشد در حالتی که فرجهٔ رادیکال فرد باشد. داخل رادیکال می‌تواند منفی باشد.

در حالت کلی برای محاسبهٔ $\sqrt[n]{a^n}$ داریم:

n: زوج $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$

n: فرد $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$

مثال ۱ نمونه‌های زیر را در نظر بگیرید

الف) $\sqrt[7]{5^7} = 5$ ب) $\sqrt[2]{(-3)^4} = |-3| = 3$ پ) $\sqrt[1]{(-2)^1} = -2$

مثال ۲ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید

الف) $\sqrt[2]{625} - \sqrt[3]{-27} = \sqrt[2]{5^2} - \sqrt[5]{(-2)^5} = |5| - (-2) = 5 + 2 = 7$

ب) $\sqrt[2]{16} + \sqrt{4} + \sqrt[3]{-125} = \sqrt[2]{2^4} + 2 + \sqrt[3]{(-5)^3} = |2| + 2 + (-5) = 4 - 5 = -1$

پ) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{(-4)^3} + \sqrt[6]{(-3)^6} = \sqrt[5]{2^5} - (-4) + |-3| = 2 + 4 + 3 = 9$

ت) بی‌معنی $= \sqrt[2]{-16} = \sqrt[2]{-(+16)} = \sqrt[4]{-(-4)^2}$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

برای هر دو عدد مثبت a و b داریم:

الف) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ب) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، داریم

الف) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ ب) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$ ب) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2 \times (-4)} = \sqrt[3]{-8} = -2$

پ) $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 20} = \sqrt{100} = 10$ ت) $\sqrt[3]{-25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-25 \times 5} = \sqrt[3]{-125} = -5$

فرمول‌های فوق را به‌صورت زیر نیز می‌توان استفاده کرد.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ب) $\sqrt[3]{27 \times 5} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{5} = 3 \times \sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

در حالت کلی برای فرجهٔ n ام داریم:

الف) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ب) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

فقط در حالتی که n زوج است باید a و b هر دو مثبت باشند.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{-128}{4}} = \sqrt[5]{-32} = -2$

ب) $\sqrt[5]{-2} \times \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{(-2) \times 16} = \sqrt[5]{-32} = -2$

پ) $\sqrt[6]{16} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{16 \times 4} = \sqrt[6]{2^4 \times 2^2} = \sqrt[6]{2^6} = |2| = 2$

مثال۱ نمونه‌های زیر را در نظر بگیرید

الف) $\sqrt[2]{5^2} = 5$ ب) $\sqrt[2]{(-3)^4} = |-3| = 3$ پ) $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید

الف) $\sqrt[2]{625} - \sqrt[3]{-27} = \sqrt[2]{5^2} - \sqrt[5]{(-2)^5} = |5| - (-2) = 5 + 2 = 7$

ب) $\sqrt[2]{16} + \sqrt{4} + \sqrt[3]{-125} = \sqrt[2]{2^4} + \sqrt[3]{(-5)^3} = |2| + 2 + (-5) = 4 - 5 = -1$

پ) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[2]{(-4)^2} + \sqrt[6]{(-3)^6} = \sqrt[5]{2^5} - (-4) + |-3| = 2 + 4 + 3 = 9$

ت) بی‌معنی $= \sqrt[2]{-16} = \sqrt[2]{-(+16)} = \sqrt[4]{-(-4)^2}$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

برای هر دو عدد مثبت a و b داریم:

الف) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ب) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، داریم

الف) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ ب) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$ ب) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2 \times (-4)} = \sqrt[3]{-8} = -2$

ب) $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 20} = \sqrt{100} = 10$ پ) $\sqrt[3]{-25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-25 \times 5} = \sqrt[3]{-125} = -5$

فرمول‌های فوق را به‌صورت زیر نیز می‌توان استفاده کرد.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ب) $\sqrt[3]{27 \times 5} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{5} = 3 \times \sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

در حالت کلی برای فرجهٔ n ام داریم:

الف) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ب) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

فقط در حالتی که n زوج است باید a و b هر دو مثبت باشند.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{-128}{4}} = \sqrt[5]{-32} = -2$

ب) $\sqrt[5]{-2} \times \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{(-2) \times 16} = \sqrt[5]{-32} = -2$

پ) $\sqrt[6]{16} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{16 \times 4} = \sqrt[6]{2^4 \times 2^2} = \sqrt[6]{2^6} = |2| = 2$

برای بردن ضریب پشت رادیکال به داخل رادیکال، آن را به توان فرجه رسانده و به داخل رادیکال می‌بریم. فقط باید توجه داشت که در رادیکال‌های فرجهٔ زوج اگر ضریب پشت رادیکال منفی باشد، علامت منفی را نمی‌توان داخل رادیکال برد. البته در فرجه‌های فرد فرقی ندارد که علامت را داخل رادیکال ببریم یا نبریم.

مثال در موارد زیر ضریب پشت رادیکال را به داخل رادیکال ببرید.

الف) $۳\sqrt{۲} = \sqrt{۳^۲ \times ۲} = \sqrt{۹ \times ۲} = \sqrt{۱۸}$

ب) $۲\sqrt[۳]{۵} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۵} = \sqrt[۳]{۸ \times ۵} = \sqrt[۳]{۴۰}$

پ) $-۳\sqrt[۴]{۲} = -\sqrt[۴]{۳^۴ \times ۲} = -\sqrt[۴]{۸۱ \times ۲} = -\sqrt[۴]{۱۶۲}$

ت) $-۲\sqrt[۳]{۷} = \sqrt[۳]{(-۲)^۳ \times ۷} = \sqrt[۳]{-۸ \times ۷} = \sqrt[۳]{-۵۶}$

در رادیکال‌های با فرجهٔ فرد، علامت منفی داخل رادیکال را می‌توان بیرون رادیکال آورد. مثال: $\sqrt[۳]{-۵۶} = -\sqrt[۳]{۵۶}$

اگر توان داخل رادیکال و فرجهٔ رادیکال قابل تقسیم بر یک عدد یکسانی باشند می‌توان آن‌ها را ساده کرد. فقط در حالتی که فرجه زوج است. پس از ساده‌کردن توان و فرجه باید مثبت‌بودن داخل رادیکال را با استفاده از قدرمطلق تضمین کنیم.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[۶]{۳^۳} = \sqrt{۳}$ ← فرجه و توان را بر ۳ ساده کردیم

ب) $\sqrt[۱۵]{۷^{۱۰}} = \sqrt[۳]{۷^۲}$ ← فرجه و توان را بر ۵ تقسیم کردیم

پ) $\sqrt[۸]{(-۲)^۶} = \sqrt[۴]{|(-۲)^۳|} = \sqrt[۴]{|-۲|^۳} = \sqrt[۴]{۲^۳}$ ← فرجه و توان را بر ۲ ساده کردیم

اگر توان داخل رادیکال بر فرجه قابل تقسیم باشد می‌توان توان را بر فرجه تقسیم کرده و رادیکال را حذف کرد. آن‌گاه عدد از رادیکال خارج می‌شود. فقط در رادیکال‌های فرجهٔ زوج باید مثبت بودن حاصل را با استفاده از قدر مطلق تضمین کرد.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{۵^۲} = ۵^{\frac{۲}{۲}} = ۵^۱ = ۲۵$

ب) $\sqrt[۳]{۷^۶} = ۷^{\frac{۶}{۳}} = ۷^۲ = ۴۹$

پ) $\sqrt[۴]{(-۵)^۸} = (-۵)^{\frac{۸}{۴}} = (-۵)^۲ = ۲۵$

ت) $\sqrt[۴]{(-۲)^{۱۲}} = (-۲)^{\frac{۱۲}{۴}} = |(-۲)^۳| = |-۸| = ۸$

ج) $-۲۷ = (-۳)^۳ = (-۳)^{\frac{۲۱}{۷}} = \sqrt[۷]{(-۳)^{۲۱}}$

چ) $۴ = (-۲)^۲ = (-۲)^{\frac{۱۰}{۵}} = \sqrt[۵]{(-۲)^{۱۰}}$

می‌توان توان عبارت داخل رادیکال و فرجهٔ رادیکال را در یک عدد صحیح مثبت ضرب کرد.

مثال نمونه‌های زیر در نظر بگیرید.

الف) $\sqrt[۲]{۵^۲} = \sqrt[۲\times۲]{۵^{۲\times۲}} = \sqrt[۱۲]{۵^۸}$

ب) $\sqrt{۳^۵} = \sqrt[۲\times۳]{۳^{۵\times۳}} = \sqrt[۶]{۳^{۱۵}}$

در حالت کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

توان رساندن رادیکال

برای به توان رساندن رادیکال‌ها، عبارت داخل رادیکال را به توان می‌رسانیم. یعنی در حالت کلی داریم: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

البته باید توجه داشت که اگر n زوج باشد باید $a \geq ۰$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(\sqrt[۲]{۲})^۲ = \sqrt[۲]{۲^۲} = \sqrt[۲]{۴}$

ب) $(\sqrt[۵]{-۳})^۴ = \sqrt[۵]{(-۳)^۴} = \sqrt[۵]{۸۱}$

پ) $(\sqrt[۲]{-۲})^۵ = \sqrt[۲]{(-۲)^۵} = \sqrt[۲]{-۳۲}$

ت) بی‌معنی است $= (\sqrt[۴]{-۳})^۲$

ریشه nام یک رادیکال

برای محاسبهٔ ریشهٔ nام عبارت $\sqrt[m]{a}$ یا $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

مثال ۱ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt[2\times 2]{4} = \sqrt[4]{4}$

ب) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-7}} = \sqrt[15]{-7}$

مثال ۲ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید و سپس نتیجهٔ حاصل را بیان کنید.

الف) $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

در الف ابتدا رادیکال‌ها را یافته و سپس با هم جمع می‌کنیم.

ب) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

در ب باید ابتدا جمع کنیم و سپس از حاصل رادیکال بگیریم.

نتیجه این‌که این دو عبارت برابر نیستند. یعنی: $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

مثال ۳ حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} = 3 - 2 = 1$

ب) $\sqrt[3]{27-8} = \sqrt[3]{19} = 2/67 \Rightarrow \sqrt[3]{27-8} \neq \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8}$

در حالت کلی عبارت‌های $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{a \pm b}$ برابر نیستند.

جمع و تفریق رادیکال‌ها

در جمع و تفریق رادیکال‌ها جملاتی را که قسمت رادیکالی آن‌ها مانند هم می‌باشد را می‌توان جمع و تفریق کرد یعنی جملاتی که فرجه و عبارت داخل رادیکال آن‌ها یکسان است قابل جمع و تفریق هستند.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

ب) $5\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{7}$

توجه کنید که عباراتی مانند $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})$ و یا $(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ ساده‌تر نمی‌شوند و به همین صورت باقی می‌مانند یعنی قابل جمع نیستند.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $5\sqrt{6} - 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt[3]{3} = 7\sqrt{6} - 6\sqrt[3]{3}$

ب) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = -2\sqrt{2} + 13\sqrt{3}$

ساده‌کردن رادیکال‌ها: ابتدا عبارت‌های داخل رادیکال‌ها را به ضرب عوامل اول تجزیه کرده و تا آنجایی‌که امکان دارد اعداد را از رادیکال به‌صورت ضریب خارج می‌کنیم و سپس با استفاده از قوانین رادیکال‌ها آن‌ها را ساده می‌کنیم.

مثال عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\sqrt[3]{8\times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2\times 3 = 6$

ب) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\times 5}} = \sqrt[6]{4\times 5} = \sqrt[6]{20}$

ب) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{\frac{3^6}{5^3}} = \sqrt{\frac{8}{2}} + \frac{\sqrt[2]{3^6}}{\sqrt[2]{5^3}} = \sqrt{4} + \frac{3^3}{5} = 2 + \frac{9}{5} = \frac{19}{5}$

ب) $\sqrt[5]{۲۲۲ \times \frac{۱}{۲۲}} = \sqrt[5]{۲۲۲} \times \sqrt[5]{\frac{۱}{۲۲}} = \sqrt[5]{۳^۵} \times \frac{\sqrt[5]{۱}}{\sqrt[5]{۲^۵}} = ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$

ت) $\sqrt[۲]{\sqrt{۲}} + ۲\sqrt[۲]{۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۴]{۲} + ۲\sqrt[۴]{۲^۲ \times ۲} = \sqrt[۴]{۲} + ۲\sqrt[۴]{۲^۲}\sqrt[۴]{۲} = \sqrt[۴]{۲} + ۲\sqrt{۲}\sqrt[۴]{۲} = ۵\sqrt[۴]{۲}$

ث) $\frac{\sqrt[۲]{۲}}{\sqrt[۲]{۲۲}} + \frac{\sqrt[۲]{۵۲}}{\sqrt[۲]{۲}} = \sqrt[۲]{\frac{۲}{۲۲}} + \sqrt[۲]{\frac{۵۲}{۲}} = \sqrt[۲]{\frac{۱}{۸}} + \sqrt[۲]{۲۷} = \frac{۱}{۲} + ۳ = \frac{۷}{۲}$

ج) $\sqrt[۲]{۲۲ \times ۹} = \sqrt[۲]{۸ \times ۳ \times ۹} = \sqrt[۲]{۲^۲ \times ۳ \times ۳^۲} = \sqrt[۲]{۲^۲ \times ۳^۲} = ۲ \times ۳ = ۶$

چ) $\sqrt{۱۲} + ۷\sqrt{۳} = \sqrt{۴ \times ۳} + ۷\sqrt{۳} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۳} + ۷\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} + ۷\sqrt{۳} = ۹\sqrt{۳}$

ح) $\sqrt[۲]{۵۶} - ۳\sqrt[۲]{۷} = \sqrt[۲]{۸ \times ۷} - ۳\sqrt[۲]{۷} = \sqrt[۲]{۸} \times \sqrt[۲]{۷} - ۳\sqrt[۲]{۷} = ۲\sqrt[۲]{۷} - ۳\sqrt[۲]{۷} = -\sqrt[۲]{۷}$

د) $\sqrt[۵]{۳^۲ \times ۵^۲} \times \sqrt[۵]{۳^۳ \times ۵^۳} = \sqrt[۵]{۳^۲ \times ۵^۲ \times ۳^۳ \times ۵^۳} = \sqrt[۵]{۳^۲ \times ۳^۳ \times ۵^۳ \times ۵^۲} = \sqrt[۵]{۳^۵ \times ۵^۵} = ۳ \times ۵ = ۱۵$

ذ) $۵\sqrt[۲]{۴} + ۳\sqrt[۲]{۳۲} - \sqrt[۲]{۱۰۸} = ۵\sqrt[۲]{۴} + ۳\sqrt[۲]{۸ \times ۴} - \sqrt[۲]{۲۷ \times ۴} = ۵\sqrt[۲]{۴} + ۳ \times ۲\sqrt[۲]{۴} - ۳\sqrt[۲]{۴} = ۵\sqrt[۲]{۴} + ۶\sqrt[۲]{۴} - ۳\sqrt[۲]{۴} = ۸\sqrt[۲]{۴}$

ر) $۲\sqrt{۱۸} - ۳\sqrt{۳۲} + \sqrt{۱۲} - \sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳^۲ \times ۲} - ۳\sqrt{۴^۲ \times ۲} + \sqrt{۲^۲ \times ۳} - \sqrt{۳} =$

$= ۲ \times ۳\sqrt{۲} - ۳ \times ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} = ۶\sqrt{۲} - ۱۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} = -۶\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$

ز) $۳\sqrt{۲} + \sqrt{۳۲} - \sqrt[۳]{۶۴} = ۳\sqrt{۲} + \sqrt{۴^۲ \times ۲} - \sqrt[۳]{۴^۳} = ۳\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} - \sqrt{۲^۳} = ۷\sqrt{۲} - \sqrt{۲^۲ \times ۲} = ۷\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$

ژ) $= \sqrt[۲]{۵۴} - ۲\sqrt[۲]{۱۶} + \sqrt[۲]{۱۲۸} - ۳\sqrt[۲]{۶۸۶} = \sqrt[۲]{۳^۳ \times ۲} - ۲\sqrt[۲]{۲^۳ \times ۲} + \sqrt[۲]{۲^۶ \times ۲} - ۳\sqrt[۲]{۷^۳ \times ۲} = ۳\sqrt[۲]{۲} - ۲ \times ۲\sqrt[۲]{۲} + ۲^۳ \times \sqrt[۲]{۲} - ۳ \times ۷^۳\sqrt[۲]{۲} =$

$۳\sqrt[۲]{۲} - ۴\sqrt[۲]{۲} + ۴\sqrt[۲]{۲} - ۳۱\sqrt[۲]{۲} = -۱۸\sqrt[۲]{۲}$

گویاکردن مخرج کسرها

گاهی اوقات لازم است تا در محاسبه‌های کسری، مخرج کسرهایی که شامل عبارت رادیکالی می‌باشند طوری نوشته شوند که مخرج فاقد رادیکال باشد. این کار را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند. برای گویاکردن مخرج کسرهایی که عبارت مخرج آن‌ها به‌صورت $\sqrt[n]{a^m}$ می‌باشد کافی است که صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم.

مثال مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۱۵}{\sqrt{۵}}$ ب) $\frac{۱}{\sqrt[۲]{۵}}$ پ) $\frac{۳}{\sqrt[۲]{۹}}$ ت) $\frac{۲}{\sqrt[۵]{۸}}$

الف) $\frac{۱۵}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۵\sqrt{۵}}{\sqrt{۵ \times ۵}} = \frac{۱۵\sqrt{۵}}{\sqrt{۵^۲}} = \frac{۱۵\sqrt{۵}}{۵} = ۳\sqrt{۵}$

ب) $\frac{۱}{\sqrt[۲]{۵}} \times \frac{\sqrt[۲]{۵^۲}}{\sqrt[۲]{۵^۲}} = \frac{\sqrt[۲]{۵^۲}}{\sqrt[۲]{۵ \times ۵^۲}} = \frac{\sqrt[۲]{۲۵}}{\sqrt[۲]{۵^۳}} = \frac{\sqrt[۲]{۲۵}}{۵}$

پ) $\frac{۳}{\sqrt[۲]{۹}} = \frac{۳}{\sqrt[۲]{۳^۲}} \times \frac{\sqrt[۲]{۳}}{\sqrt[۲]{۳}} = \frac{۳\sqrt[۲]{۳}}{\sqrt[۲]{۳^۲ \times ۳}} = \frac{۳\sqrt[۲]{۳}}{\sqrt[۲]{۳^۳}} = \frac{۳\sqrt[۲]{۳}}{۳} = \sqrt[۲]{۳}$

ت) $\frac{۲}{\sqrt[۵]{۸}} = \frac{۲}{\sqrt[۵]{۲^۳}} \times \frac{\sqrt[۵]{۲^۲}}{\sqrt[۵]{۲^۲}} = \frac{۲\sqrt[۵]{۴}}{\sqrt[۵]{۲^۳ \times ۲^۲}} = \frac{۲\sqrt[۵]{۴}}{\sqrt[۵]{۲^۵}} = \frac{۲\sqrt[۵]{۴}}{۲} = \sqrt[۵]{۴}$