تعریف عدد گویا: هر عددی را که بتوان به‌صورت یک کسر نشان داد با این شرط که صورت و مخرج آن اعداد صحیح باشد و مخرج مخالف صفر، عدد گویا نامیده می‌شود. بنابراین اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ باشد کسر $\frac{a}{b}$ را یک عدد گویا می‌نامند. مجموعهٔ اعداد گویا را با نماد Q نمایش می‌دهند و داریم

$$\boxed{Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a\ , b \in Z\ , b \neq ۰ \right\}}$$

مثال کسرهای مقابل اعداد گویا هستند.
$\frac{۳}{۷}\ , \frac{-۲}{۵}\ , \frac{-۶}{-۱۱}\ , \frac{۰}{۴}$

با توجه به تعریف، تساوی‌های مقابل را داریم:
$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

مثال کسرهای مقابل با هم مساوی هستند.
$-\frac{۲}{۳} = \frac{-۲}{۳} = \frac{۲}{-۳}$

از آنجایی‌که هر عدد طبیعی یا صحیح یا حسابی مانند a را می‌توان به‌صورت $\frac{a}{۱}$ نوشت بنابراین اعداد طبیعی، صحیح و حسابی نیز اعدادی گویا هستند پس داریم:

$$\boxed{N \subseteq Q \text{ و } Z \subseteq Q \text{ و } W \subseteq Q}$$

مثال اعداد ۶- و ۷ را به‌صورت گویا بنویسید.
$۷ = \frac{۷}{۱}\ , -۶ = \frac{-۶}{۱}$

دو عدد گویای مساوی

از ضرب صورت و مخرج عدد گویای $\frac{a}{b}$ در عدد غیر صفر m $(m \neq ۰)$ یا در صورت امکان تقسیم صورت و مخرج آن بر عدد غیر صفر m، عدد گویای مساوی آن به‌دست می‌آید.

$\frac{a}{b} = \frac{a \times m}{b \times m} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}\ , \quad \frac{am}{bm} = \frac{a \times \cancel{m}}{b \times \cancel{m}} = \frac{a}{b}$

مثال عدد گویای مساوی کسرهای مقابل را بنویسید.
الف) $\frac{۳}{۲} = \frac{۳ \times ۴}{۲ \times ۴} = \frac{۱۲}{۸}$ ب) $\frac{۱۵}{۱۸} = \frac{\cancel{۳} \times ۵}{\cancel{۳} \times ۶} = \frac{۵}{۶}$

نتیجه: هر عدد گویا دارای بی‌شمار نمایش است، مانند $\frac{۲}{۳}$ که داریم:
$\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۶}{۹} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{-۱۰}{-۱۵} = \frac{-۱۲}{-۱۸} = \dots$

مقایسه کسرها

برای مقایسهٔ کسرها یکی از حالت‌های زیر می‌تواند وجود داشته باشد:

۱- مخرج‌ها مساوی باشند. **۲- صورت‌ها مساوی باشند.** **۳- صورت‌ها و مخرج‌ها مساوی نباشند.**

۱- اگر در دو کسر، مخرج‌ها مساوی باشند، کسری بزرگ‌تر است که صورت آن بزرگ‌تر باشد

مثال
الف) $\frac{۷}{۶}, \frac{۹}{۶} \Rightarrow ۷ < ۹ \Rightarrow \frac{۷}{۶} < \frac{۹}{۶}$
ب) $\frac{۱۷}{۸}, \frac{۲۱}{۸} \Rightarrow ۱۷ < ۲۱ \Rightarrow \frac{۱۷}{۸} < \frac{۲۱}{۸}$

۱- اگر در دو کسر، صورت‌ها مساوی باشند، کسری بزرگ‌تر است که مخرج آن کوچک‌تر باشد.

مثال

الف) $\frac{۷}{۳}$ و $\frac{۷}{۵} \Rightarrow ۳<۵ \Rightarrow \frac{۷}{۳}>\frac{۷}{۵}$

ب) $\frac{۱۱}{۲۱}$ و $\frac{۱۱}{۳۱} \Rightarrow ۲۱<۳۱ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲۱}>\frac{۱۱}{۳۱}$

برای مقایسهٔ کسرهای مخلوط نیز، کافی است ابتدا به بخش صحیح آن‌ها نگاه کنیم. سپس از بین دو کسر مخلوط، آن کسر بزرگ‌تر است که قسمت عدد صحیح‌اش بزرگ‌تر باشد. (البته باید توجه داشت که قسمت کسری کوچک‌تر از یک باشد)

مثال

الف) $۲\frac{۷}{۱۱}$ و $۳\frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow ۲<۳ \Rightarrow ۲\frac{۷}{۱۱}<۳\frac{۱۲}{۱۳}$

ب) $۷\frac{۱}{۱۰۰۰}$ و $۲\frac{۸}{۹} \Rightarrow ۷>۲ \Rightarrow ۷\frac{۱}{۱۰۰۰}>۲\frac{۸}{۹}$

اگر در دو کسر مخلوط، قسمت صحیح‌شان باهم مساوی بود، به‌سراغ مقایسهٔ قسمت کسری می‌رویم و دراین حالت، کسر مخلوطی بزرگ‌تر است که قسمت کسری‌اش بزرگ‌تر باشد.

مثال

الف) $۳\frac{۲}{۵}$ و $۳\frac{۲}{۷} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۲}{۵}>\frac{۲}{۷}\\ ۳=۳\end{cases} \Rightarrow ۳\frac{۲}{۵}>۳\frac{۲}{۷}$

ب) $۵\frac{۷}{۸}$ و $۵\frac{۳}{۸} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۷}{۸}>\frac{۳}{۸}\\ ۵=۵\end{cases} \Rightarrow ۵\frac{۷}{۸}>۵\frac{۳}{۸}$

پ) $۳\frac{۷}{۴}$ و $۴\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳\frac{۷}{۴}=۴\frac{۳}{۴}$ و $۴\frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۳}{۴}>\frac{۱}{۴}\\ ۴=۴\end{cases} \Rightarrow ۴\frac{۳}{۴}>۴\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳\frac{۷}{۴}>۴\frac{۱}{۴}$

۳- اگر در دو کسر، نه صورت کسرها باهم برابر باشند و نه مخرج کسرها، در این حالت برای آن که امکان مقایسهٔ آن دو وجود داشته باشد، باید یا مخرج‌ها را یکی کنیم و یا صورت‌ها را برابر نماییم. نحوهٔ کار نیز به‌این ترتیب است که «ک.م.م» صورت‌ها (یا مخرج‌ها) را یافته. سپس برای رسیدن به آن «ک.م.م»، صورت‌ها (یا مخرج‌ها) را در عددی مناسب ضرب می‌کنیم هر عددی را که در صورت (یا مخرج) کسر ضرب کرده‌ایم باید در مخرج‌اش (یا صورت) نیز ضرب نماییم. به‌این ترتیب به دو کسر خواهیم رسید که صورت (یا مخرج) مساوی دارندو به راحتی قابل مقایسه می‌باشند.

مثال

الف) $\frac{۷}{۵}$ و $\frac{۴}{۳} \Rightarrow [۵و۳]=۱۵ \Rightarrow \frac{۷\times۳}{۵\times۳},\frac{۴\times۵}{۳\times۵} \Rightarrow \frac{۲۱}{۱۵},\frac{۲۰}{۱۵} \Rightarrow ۲۱>۲۰ \Rightarrow \frac{۲۱}{۱۵}>\frac{۲۰}{۱۵} \Rightarrow \frac{۷}{۵}>\frac{۴}{۳}$

ب) $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۴}{۵} \Rightarrow [۳و۴]=۱۲ \Rightarrow \frac{۳\times۴}{۷\times۴},\frac{۴\times۳}{۵\times۳} \Rightarrow \frac{۱۲}{۲۸},\frac{۱۲}{۱۵} \Rightarrow ۱۵<۲۸ \Rightarrow \frac{۱۲}{۲۸}<\frac{۱۲}{۱۵} \Rightarrow \frac{۳}{۷}<\frac{۴}{۵}$

پ) $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۸} \Rightarrow [۱۲و۱۸]=۳۶ \Rightarrow \frac{۵\times۳}{۱۲\times۳},\frac{۷\times۲}{۱۸\times۲} \Rightarrow \frac{۱۵}{۳۶},\frac{۱۴}{۳۶} \Rightarrow ۱۵>۱۴ \Rightarrow \frac{۱۵}{۳۶}>\frac{۱۴}{۳۶} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲}>\frac{۷}{۱۸}$

ت) $\frac{۱۴}{۲۳}$ و $\frac{۴۲}{۱۷} \Rightarrow [۱۴,۴۲]=۴۲ \Rightarrow \frac{۱۴\times۳}{۲۳\times۳},\frac{۴۲\times۱}{۱۷\times۱} \Rightarrow \frac{۴۲}{۶۹},\frac{۴۲}{۱۷} \Rightarrow ۱۷<۶۹ \Rightarrow \frac{۴۲}{۶۹}<\frac{۴۲}{۱۷} \Rightarrow \frac{۱۴}{۲۳}<\frac{۴۲}{۱۷}$

ث) $۳\frac{۲}{۳}$ و $۳\frac{۷}{۸} \Rightarrow ۳=۳ \Rightarrow \frac{۲}{۳},\frac{۷}{۸} \Rightarrow [۳و۸]=۲۴ \Rightarrow \frac{۲\times۸}{۳\times۸},\frac{۷\times۳}{۸\times۳} \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۴},\frac{۲۱}{۲۴} \Rightarrow ۱۶<۲۱ \Rightarrow ۳\frac{۲}{۳}<۳\frac{۷}{۸}$

ج) $۵\frac{۳}{۸}$ و $۵\frac{۷}{۹} \Rightarrow ۵=۵ \Rightarrow \frac{۳}{۸},\frac{۷}{۹} \Rightarrow [۳و۷]=۲۱ \Rightarrow \frac{۳\times۷}{۸\times۷},\frac{۷\times۳}{۹\times۳} \Rightarrow \frac{۲۱}{۵۶},\frac{۲۱}{۲۷} \Rightarrow ۲۷<۵۶ \Rightarrow ۵\frac{۳}{۸}<۵\frac{۷}{۹}$

اعداد گویای بین دو عدد گویا

بین دو عدد صحیح متوالی مانند ۴ و ۵ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد اما این مطلب در مورد اعداد گویا درست نیست، یعنی بین هر دو عدد گویا، هر قدر هم به‌هم نزدیک باشند، نه تنها یک عدد گویا بلکه بی‌شمار عدد گویا وجود دارد مثلاً عدد $\frac{۳}{۲}$ یکی از اعداد گویای بین دو عدد گویای ۱ و ۲ است و این مطلب را چنین می‌نویسیم:

$۱<\frac{۳}{۲}<۲$

عدد گویای $\frac{e}{f}$ را بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ گوییم ($\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$) هرگاه داشته باشیم: $\frac{c}{d}<\frac{e}{f}<\frac{a}{b}$

برای یافتن عدد گویا یا اعداد گویای بین دو عدد گویا، روش‌های مختلفی وجود دارد که در زیر آن‌ها را بیان می‌کنیم

الف) یکسان‌سازی مخرج‌ها: در این روش ابتدا صورت و مخرج هر کدام از کسرها را در اعداد مناسبی ضرب می‌کنیم تا مخرج هر دو کسر یکسان شود. سپس کسری که مخرج آن با مخرج دو کسر یکسان بوده و صورت آن عددی بین دو عدد صورت دو کسر باشد جواب مسئله است.

مثلاً اگر بخواهیم بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ یک عدد گویا بیابیم، داریم:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۲\times۴}{۳\times۴}=\frac{۸}{۱۲}\ ,\ \frac{۱}{۴}=\frac{۱\times۳}{۴\times۳}=\frac{۳}{۱۲}\Rightarrow\frac{۳}{۱۲}<\frac{۴}{۱۲}<\frac{۸}{۱۲}\ \text{یا}\ \frac{۳}{۱۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۸}{۱۲}\ \text{یا}\ \frac{۳}{۱۲}<\frac{۶}{۱۲}<\frac{۸}{۱۲}\ \text{یا}\ \frac{۳}{۱۲}<\frac{۷}{۱۲}<\frac{۸}{۱۲}$$

تمام اعداد $\frac{۴}{۱۲}$، $\frac{۵}{۱۲}$، $\frac{۶}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۲}$ بین دو عدد گویای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ قرار دارند، یعنی: $\frac{۳}{۱۲}<\frac{۴}{۱۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۶}{۱۲}<\frac{۷}{۱۲}<\frac{۸}{۱۲}$

مثال۱ بین دو عدد $\frac{-۱}{۲}$ و $\frac{-۲}{۵}$ سه عدد گویا بیابید.

پاسخ: $$-\frac{۱}{۲}=\frac{-۵}{۱۰}=\frac{-۲۰}{۴۰}\ ,\ -\frac{۲}{۵}=-\frac{۴}{۱۰}=-\frac{۱۶}{۴۰}\Rightarrow\frac{-۲۰}{۴۰}<\frac{-۱۹}{۴۰}<\frac{-۱۸}{۴۰}<\frac{-۱۷}{۴۰}<\frac{-۱۶}{۴۰}$$

$\frac{-۱۹}{۴۰}$، $\frac{-۱۸}{۴۰}$ و $\frac{-۱۷}{۴۰}$ سه عدد گویا بین $-\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۲}{۵}$ هستند.

مثال۲ بین دو عدد $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۳}{۷}$ چهار عدد گویا بیابید.

پاسخ: اعداد $\frac{۸}{۳۵}$، $\frac{۱۰}{۳۵}$، $\frac{۱۱}{۳۵}$ و $\frac{۱۳}{۳۵}$ چهار عدد گویا بین $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۳}{۷}$ هستند.

$$\frac{۱}{۵}=\frac{۷}{۳۵}\ ,\ \frac{۳}{۷}=\frac{۱۵}{۳۵}\Rightarrow\frac{۷}{۳۵}<\frac{۸}{۳۵}<\frac{۱۰}{۳۵}<\frac{۱۱}{۳۵}<\frac{۱۳}{۳۵}<\frac{۱۵}{۳۵}$$

مثال۳ کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۱۰}$، $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید.

۳۰ = [۲ و ۱۰ و ۵ و ۳]

پاسخ: $$\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳۰}\ ,\ \frac{۲}{۵}=\frac{۱۲}{۳۰}\ ,\ \frac{۳}{۱۰}=\frac{۹}{۳۰}\ ,\ \frac{۱}{۲}=\frac{۱۵}{۳۰}\Rightarrow\frac{۹}{۳۰}<\frac{۱۰}{۳۰}<\frac{۱۲}{۳۰}<\frac{۱۵}{۳۰}\Rightarrow\frac{۳}{۱۰}<\frac{۱}{۳}<\frac{۲}{۵}<\frac{۱}{۲}$$

ب) میانگین: میدانیم میانگین هر دو عدد، بین آن دو عدد قرار دارد. بنابراین میانگین دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، $(\frac{a}{b}<\frac{c}{d})$ یعنی $\frac{۱}{۲}(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})$ بین دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار دارد، پس

$$\boxed{\frac{a}{b}<\frac{۱}{۲}(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})<\frac{c}{d}}$$

مثال۱ یک عدد گویا بین دو عدد $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۵}{۳}$ بیابید.

پاسخ: $$\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۶}\ ,\ \frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۳}+\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}(\frac{۱۰}{۶}+\frac{۹}{۶})=\frac{۱۹}{۱۲}\Rightarrow\frac{۹}{۶}<\frac{۱۹}{۱۲}<\frac{۱۰}{۶}\Rightarrow\frac{۳}{۲}<\frac{۱۹}{۱۲}<\frac{۵}{۳}$$

مثال۲ بین دو عدد $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۲}{۳}$، دو عدد گویا بیابید.

پاسخ: $$\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۱۵}\ ,\ \frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{۱۵}\Rightarrow\frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۵})=\frac{۱}{۲}(\frac{۱۰}{۱۵}+\frac{۳}{۱۵})=\frac{۱۳}{۳۰}\Rightarrow\frac{۳}{۱۵}<\frac{۱۳}{۳۰}<\frac{۱۰}{۱۵}$$

حال می‌توانیم میانگین دو عدد $\frac{۳}{۱۵}$ و $\frac{۱۳}{۳۰}$ را بیابیم:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۱۵}+\frac{۱۳}{۳۰})=\frac{۱}{۲}(\frac{۶}{۳۰}+\frac{۱۳}{۳۰})=\frac{۱۹}{۶۰}\Rightarrow\frac{۳}{۱۵}<\frac{۱۹}{۶۰}<\frac{۱۳}{۳۰}<\frac{۱۰}{۱۵}\Rightarrow\frac{۱}{۵}<\frac{۱۹}{۶۰}<\frac{۱۳}{۳۰}<\frac{۲}{۳}$$

البته می‌توانستیم میانگین دو عدد $\frac{۱۰}{۱۵}$ و $\frac{۱۳}{۳۰}$ را هم بیابیم یعنی:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{۱۰}{۱۵}+\frac{۱۳}{۳۰})=\frac{۱}{۲}(\frac{۲۰}{۳۰}+\frac{۱۳}{۳۰})=\frac{۳۳}{۶۰}=\frac{۱۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۳}{۱۵}<\frac{۱۳}{۳۰}<\frac{۱۱}{۲۰}<\frac{۱۰}{۱۵}\Rightarrow\frac{۱}{۵}<\frac{۱۳}{۳۰}<\frac{۱۱}{۲۰}<\frac{۲}{۳}$$

پ) اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویا باشند $(\frac{a}{b}<\frac{c}{d})$، عدد گویای $\frac{a+c}{b+d}$ همواره بین آن‌ها قرار دارد یعنی

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

مثال۱ یک عدد گویا بین دو عدد $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۱}{۷}$ بیابید.

$$\frac{۱}{۷}<\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۷}<\frac{۱+۳}{۷+۲}<\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۷}<\frac{۴}{۹}<\frac{۳}{۲}$$

مثال۲ بین دو عدد گویای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$، سه عدد گویا بیابید.

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۱۲} \quad , \quad \frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۱۲}<\frac{۹}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۲+۳}{۳+۴}<\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۵}{۷}<\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۲+۵}{۳+۷}<\frac{۵}{۷}<\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۵}{۷}<\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۵}{۷}<\frac{۵+۳}{۷+۴}<\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۵}{۷}<\frac{۸}{۱۱}<\frac{۳}{۴}$$

$\frac{۷}{۱۰}$، $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۸}{۱۱}$ سه عدد گویا بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$ هستند

بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

مجموعهٔ عددهای گویا را نمی‌توان با نوشتن عضوهایش مشخص کرد.

اعداد گویای تحویل‌ناپذیر

اعدادی نظیر $\frac{۶}{۴}$، $\frac{۱۲}{۸}$ و $\frac{۱۵}{۶}$ که «ب.م.م» صورت و مخرج آن‌ها عددی به غیر از یک است، اعداد گویای تحویل‌پذیر می‌گویند. یعنی اعداد گویایی که صورت و مخرج آن‌ها قابل ساده‌کردن هستند و اعدادی نظیر $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۹}{۸}$ که «ب.م.م» صورت و مخرج آن‌ها یک است، اعداد گویای تحویل ناپذیر خوانده می‌شوند. یعنی اعداد گویایی که صورت و مخرج آن‌ها قابل ساده‌کردن نمی‌باشند.

نمایش اعشاری اعداد گویا

برای محاسبهٔ کسر $\frac{۷}{۴}$ اگر توسط ماشین‌حساب عدد ۷ را بر ۴ تقسیم کنیم، حاصل ۱/۷۵ می‌باشد و هم‌چنین برای محاسبهٔ کسر $\frac{۴}{۳}$ اگر توسط ماشین‌حساب عدد ۴ را بر ۳ تقسیم کنیم، حاصل ...۱/۳۳۳ می‌باشد. بنابراین هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری می‌باشد. عدد اعشاری حاصل از یک عدد گویا سه حالت دارد که به‌صورت زیر می‌باشد:

الف) اعداد اعشاری مختوم یا متناهی: اعداد اعشاری مختوم اعدادی هستند که تعداد رقم‌های بعد از اعشار آن‌ها متناهی بوده و در یک رقمی، قطع شده و تمام می‌شود. مانند: ۳/۷۹۶۴

کسرهای تحویل‌ناپذیری که در مخرج آن‌ها فقط عوامل اول ۲ یا ۵ وجود داشته باشد قابل تبدیل به کسر اعشاری تحقیقی یا مختوم یا متناهی می‌باشد. در چنین کسرهایی اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم و در تقسیم پیشروی کنیم بالاخره باقی‌مانده به صفر خواهد رسید. مانند.

الف) $\frac{۷}{۴}=\frac{۷}{۲^{۲}}=۱/۷۵$ ب) $\frac{۳}{۲۰}=\frac{۳}{۲^{۲}\times۵}=۰/۱۵$ پ) $\frac{۹}{۵۰}=\frac{۹}{۲\times۵^{۲}}=۰/۱۸$

ب) اعداد اعشاری متناوب ساده: اگر مخرج کسری را به عوامل اول تجزیه کنیم در مخرج آن‌ها فقط عوامل اول غیر از ۲ و ۵ وجود داشته باشد، در چنین کسرهایی اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم و در تقسیم بیشروی کنیم باقی‌مانده هیچ‌گاه به صفر نخواهد رسید و خارج‌قسمت مختوم به‌دست نمی‌آید. بلکه در خارج‌قسمت مرتب رقم یا ارقامی تکرار می‌شود و خارج‌قسمت به‌دست آمده همیشه تقریبی خواهد بود. مانند:

$$\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶...\simeq۰/۶۷$$

چنین اعدادی را اعداد اعشاری متناوب ساده می‌نامند و با نماد مقابل نشان می‌دهند.

$$\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶...=۰/\overline{۶}$$

رقم یا دستهٔ ارقامی که مرتب تا بی‌نهایت تکرار می‌شوند را دورهٔ گردش می‌نامند و برای سهولت در نوشتن این اعداد اعشاری، فقط یک دورهٔ گردش را می‌نویسیم و بالای آن دستهٔ ارقام، یک خط قرار می‌دهیم. مانند:

الف) $\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷۲۷...=۰/\overline{۲۷}$ ب) $\frac{۳}{۷}=۰/۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱...=۰/\overline{۴۲۸۵۷۱}$

پ) عدد اعشاری متناوب مرکب: اگر مخرج هر یک از کسرهای این دسته از اعداد را به عوامل اول تجزیه کنیم عامل‌های اول ۲ یا ۵ وجود دارد و در عین حال عامل‌های اول دیگری مثل ۳ یا ۷ یا ۱۱ و ... نیز دیده می‌شود. در هر یک از این کسرها اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم و

در تقسیم پیشروی کنیم، باقی‌مانده هیچ‌گاه به صفر نخواهد رسید و خارج‌قسمت همیشه تقریبی خواهد بود. در خارج‌قسمت این اعداد غیر از ارقام دورهٔ گردش، ارقام دیگری نیز وجود دارد که تکرار نمی‌شود که آن‌ها را ارقام غیر گردشی یا ثابت می‌نامند. مانند:

الف) $\frac{۵}{۶} = \frac{۵}{۲\times۳} = ۰/۸۳۳... = ۰/۸\overline{۳}$

ب) $\frac{۷}{۱۵} = \frac{۷}{۳\times۵} = ۰/۴۶۶۶... = ۰/۴\overline{۶}$

مثال **نوع عدد اعشاری حاصل از هر کدام از اعداد گویای زیر را بدون انجام تقسیم مشخص کنید.**

الف) $\frac{۷}{۵۰} = \frac{۷}{۲\times۵^۲} \longrightarrow$ عدد اعشاری مختوم

ب) $\frac{۳}{۱۵} = \frac{۱}{۵} \longrightarrow$ عدد اعشاری مختوم

ب) $\frac{۹}{۱۴} = \frac{۹}{۲\times۷} \longrightarrow$ عدد اعشاری متناوب مرکب

ت) $\frac{۷}{۳۳} = \frac{۷}{۳\times۱۱} \longrightarrow$ عدد اعشاری متناوب ساده

ث) $\frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۵}{۷} \longrightarrow$ عدد اعشاری متناوب ساده

ج) $\frac{۹}{۲۲} = \frac{۹}{۲\times۱۱} \longrightarrow$ عدد اعشاری متناوب مرکب

ج) $\frac{۱۴}{۳۵} = \frac{۲}{۵} \longrightarrow$ عدد اعشاری مختوم

ح) $\frac{۱۴}{۱۵} = \frac{۱۴}{۳\times۵} \longrightarrow$ عدد اعشاری متناوب مرکب

خ) $\frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳} \longrightarrow$ عدد اعشاری متناوب ساده

د) $\frac{۲}{۲۴} = \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۲^۲\times۳} \longrightarrow$ عدد اعشاری متناوب مرکب

۱- تبدیل عدد اعشاری تحقیقی کوچک‌تر از واحد به کسر متعارفی (یا کسر گویا): برای این کار کافی است کسر متعارفی بنویسیم که صورت آن ارقام بعد از ممیز آن عدد و مخرج آن ۱۰^n باشد که n برابر تعداد ارقام بعد از ممیز است و سپس آن را ساده کرده و به کسر تحویل‌ناپذیر تبدیل نماییم. مانند:

الف) $۰/۸ = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$ ب) $۰/۴۵ = \frac{۴۵}{۱۰۰} = \frac{۹}{۲۰}$ پ) $۰/۱۲۵ = \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۸}$

مثال **اعداد ۲/۷، ۵/۳۲ را به‌صورت کسر گویا بنویسید.**

الف) $۲/۷ = ۲ + ۰/۷ = ۲ + \frac{۷}{۱۰} = \frac{۲۰+۷}{۱۰} = \frac{۲۷}{۱۰}$

ب) $۵/۳۲ = ۵ + \frac{۳۲}{۱۰۰} = ۵ + \frac{۸}{۲۵} = \frac{۱۲۵+۸}{۲۵} = \frac{۱۳۳}{۲۵}$

۲- تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به کسر گویا: برای این کار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا آن عدد اعشاری را مساوی x قرار می‌دهیم.

ب) طرفین این تساوی را در ۱۰^n که n برابر تعداد ارقام دورهٔ گردش است ضرب می‌کنیم.

پ) دو تساوی مراحل الف و ب را از هم کم می‌کنیم.

ت) از این تساوی حاصل x را حساب می‌کنیم.

مثال **کسر گویای مساوی هر کدام از اعداد اعشاری زیر را بیابید.**

الف) $۰/\overline{۷}$ ب) $۰/\overline{۲۳}$ پ) $۲/\overline{۴}$ ت) $۳/\overline{۲۱}$

الف) $x = ۰/\overline{۷} = ۰/۷۷... \Rightarrow ۱۰x = ۷/۷۷... \Rightarrow ۱۰x - x = ۷/۷۷... - ۰/۷۷... = ۷ \Rightarrow ۹x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۹} \Rightarrow ۰/\overline{۷} = \frac{۷}{۹}$

ب) $x = ۰/\overline{۲۳} = ۰/۲۳۲۳... \Rightarrow ۱۰۰x = ۲۳/۲۳۲۳... \Rightarrow ۱۰۰x - x = ۲۳/۲۳۲۳... - ۰/۲۳۲۳... = ۲۳ \Rightarrow ۹۹x = ۲۳$

$\Rightarrow x = \frac{۲۳}{۹۹} \Rightarrow ۰/\overline{۲۳} = \frac{۲۳}{۹۹}$

پ) $x = ۲/\overline{۴} = ۲/۴۴... \Rightarrow ۱۰x = ۲۴/۴۴... \Rightarrow ۱۰x - x = ۲۴/۴۴... - ۲/۴۴... = ۲۲ \Rightarrow ۹x = ۲۲ \Rightarrow x = \frac{۲۲}{۹} \Rightarrow ۲/\overline{۴} = \frac{۲۲}{۹}$

ت) $x = ۳/\overline{۲۱} = ۳/۲۱۲۱... \Rightarrow ۱۰۰x = ۳۲۱/۲۱۲۱... \Rightarrow ۱۰۰x - x = ۳۲۱/۲۱۲۱... - ۳/۲۱۲۱... = ۳۱۸ \Rightarrow ۹۹x = ۳۱۸$

$\Rightarrow x = \frac{۳۱۸}{۹۹} \Rightarrow ۳/\overline{۲۱} = \frac{۳۱۸}{۹۹} = \frac{۱۰۶}{۳۳}$

برای تبدیل بخش اعشاری یک عدد اعشاری متناوب ساده به کسر گویا می‌توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد:

$$\text{بخش اعشاری یک عدد اعشاری متناوب ساده} = \frac{\text{کل ارقام دورهٔ گردش}}{\text{به تعداد ارقام دورهٔ گردش ۹}}$$

مثال اعداد اعشاری متناوب ساده را به کسر گویا تبدیل کنید.

الف) $۰/\overline{۴} = \frac{۴}{۹}$

ب) $۰/\overline{۲۷} = \frac{۲۷}{۹۹}$

ب) $۰/\overline{۱۳۷} = \frac{۱۳۷}{۹۹۹}$

ت) $۲/\overline{۳} = ۲ + ۰/\overline{۳} = ۲ + \frac{۳}{۹} = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$

ث) $۳/\overline{۲۱} = ۳ + ۰/\overline{۲۱} = ۳ + \frac{۲۱}{۹۹} = ۳ + \frac{۷}{۳۳} = \frac{۹۹+۷}{۳۳} = \frac{۱۰۶}{۳۳}$

۳- تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به کسر گویا: برای این کار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا آن عدد اعشاری را برابر x قرار می‌دهیم

ب) طرفین تساوی را در ۱۰^{p} که p تعداد ارقام غیرگردش است ضرب می‌کنیم.

پ) طرفین تساوی اخیر را در ۱۰^{n} که n تعداد ارقام دورهٔ گردش است ضرب می‌کنیم.

ت) تساوی‌های حاصل از مراحل ب و پ را از هم کم می‌کنیم

ث) از تساوی اخیر x را محاسبه می‌کنیم.

مثال کسر گویای برابر هر کدام از اعداد اعشاری زیر را بیابید.

الف) $۰/۳\overline{۲۷}$ ب) $۲/۳۱\overline{۴}$

الف) $x = ۰/۳\overline{۲۷} \Rightarrow ۱۰x = ۳/\overline{۲۷} \Rightarrow ۱۰۰۰x = ۳۲۷/\overline{۲۷} \Rightarrow ۱۰۰۰x - ۱۰x = ۳۲۷/\overline{۲۷} - ۳/\overline{۲۷} = ۳۲۴ \Rightarrow ۹۹۰x = ۳۲۴$

$\Rightarrow x = \frac{۳۲۴}{۹۹۰} \Rightarrow ۰/۳\overline{۲۷} = \frac{۳۲۴}{۹۹۰} = \frac{۱۸}{۵۵}$

ب) $x = ۲/۳۱\overline{۴} \Rightarrow ۱۰۰x = ۲۳۱/\overline{۴} \Rightarrow ۱۰۰۰x = ۲۳۱۴/\overline{۴} \Rightarrow ۱۰۰۰x - ۱۰۰x = ۲۳۱۴/\overline{۴} - ۲۳۱/\overline{۴} \Rightarrow ۹۰۰x = ۲۰۸۳$

$\Rightarrow x = \frac{۲۰۸۳}{۹۰۰} = ۲/۳۱\overline{۴}$

برای تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به کسر گویا می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد.

$$\text{عدد اعشاری متناوب مرکب} = \frac{\text{ارقامی که دورهٔ گردش ندارند} - \text{کل عدد بدون اعشار}}{\underbrace{۹۹...۹}_{\text{به تعداد ارقام دورهٔ گردش}}\ \underbrace{۰۰...۰}_{\text{به تعداد ارقام غیر گردشی در قسمت اعشاری}}}$$

مثال۱ اعداد اعشاری متناوب مرکب را به کسر گویا تبدیل کنید.

الف) $۰/۲\overline{۳۴} = \frac{۲۳۴-۲}{۹۹۰} = \frac{۲۳۲}{۹۹۰} = \frac{۱۱۶}{۴۹۵}$

ب) $۳/۵۴\overline{۲} = \frac{۳۵۴۲-۳۵۴}{۹۰۰} = \frac{۳۱۸۸}{۹۰۰} = \frac{۱۵۹۴}{۴۵۰} = \frac{۷۹۷}{۲۲۵}$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۰/\overline{۵} - ۰/\overline{۲} = ۰/۵۵... - ۰/۲۲... = ۰/۳۳... = ۰/\overline{۳}$

ب) $۰/\overline{۳} + ۱/\overline{۲} = ۰/۳۳... + ۱/۲۲... = ۱/۵۵... = ۱/\overline{۵}$

ب) $۰/\overline{۱۴} + ۰/\overline{۲۳} = ۰/۱۴۱۴... + ۰/۲۳۲۳... = ۰/۳۷۳۷... = ۰/\overline{۳۷}$

ت) $۰/\overline{۳} + ۰/\overline{۱۲} = ۰/۳۳... + ۰/۱۲۱۲... = ۰/۴۵۴۵... = ۰/\overline{۴۵}$

ث) $۲ \times ۰/\overline{۴} + ۰/\overline{۰۱} = ۰/۸۸... + ۰/۰۱۰۱... = ۰/۸۹۸۹... = ۰/\overline{۸۹}$

ج) $۰/\overline{۷} - ۰/\overline{۲۱} = ۰/۷۷۷۷... - ۰/۲۱۲۱... = ۰/۵۶۵۶... = ۰/\overline{۵۶}$

ج) $۰/\overline{۴۷} - ۰/\overline{۲۳} = ۰/۴۷۴۷... - ۰/۲۳۲۳... = ۰/۲۴۲۴... = ۰/\overline{۲۴}$

ح) $۳ \times ۰/\overline{۳} - ۰/\overline{۵۲} = ۰/۹۹۹۹... - ۰/۵۲۵۲... = ۰/۴۷۴۷... = ۰/\overline{۴۷}$

مثال ۳ کسر متعارفی هریک از اعداد اعشاری زیر را بنویسید.

الف) $۰/\overline{۶}\times ۰/\overline{۲۳}=\frac{۶}{۹}\times\frac{۲۳}{۹۹}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۳}{۹۹}=\frac{۴۶}{۲۹۷}$

ب) $۰/\overline{۱۶}\times ۰/۱\overline{۶}=\frac{۱۶}{۹۹}\times\frac{۱۶-۱}{۹۰}=\frac{۱۶}{۹۹}\times\frac{۱۵}{۹۰}=\frac{\overset{۸}{\cancel{۱۶}}\times\overset{۱}{\cancel{۱۵}}}{۹۹\times\underset{\underset{۳}{\cancel{۴۵}}}{\cancel{۹۰}}}=\frac{۸}{۲۹۷}$

پ) $۰/\overline{۲}+۰/\overline{۰۵}=۰/۲۲۲...+۰/۰۵۰۵۰۵...=۰/۲۷۲۷...=۰/\overline{۲۷}=\frac{۲۷}{۹۹}$

ت) $۱/\overline{۲}+۰/۳\overline{۲}=۱/۲۲...+۰/۳۲۲۲...=۱/۵۴۴...=۱/۵\overline{۴}=\frac{۱۵۴-۱۵}{۹۰}=\frac{۱۳۹}{۹۰}$

مثال ۴ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۲}{-۱-\frac{۳}{-۱-\frac{۱}{۲}}}=\frac{۲}{-۱-\frac{۳}{\frac{-۳}{۲}}}=\frac{۲}{-۱-\frac{۲\times ۳}{-۳}}=\frac{۲}{-۱+۲}=\frac{۲}{۱}=۲$

ب) $\frac{۲+\frac{۲}{۳}}{-۳+\frac{۳}{۴}}\times\frac{\frac{۱}{۶}-\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۶}\div ۲\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{-۹}{۴}}\times\frac{\frac{-۳}{۶}}{\frac{۵}{۶}\times\frac{۲}{۵}}=-\frac{۳۲}{۲۷}\times\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=-\frac{۳۲}{۲۷}\times(-\frac{۳}{۲})=\frac{\overset{۱۶}{\cancel{۳۲}}\times\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\underset{۹}{\cancel{۲۷}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=\frac{۱۶}{۹}$

پ) $\frac{۱+\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}}{\frac{۸}{۱۶}-\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}}\div ۳\frac{۱}{۵}=\frac{\frac{۴+۳-۲}{۴}}{\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}}\div\frac{۱۶}{۵}=\frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۶-۹-۸}{۱۲}}\times\frac{۵}{۱۶}=\frac{\frac{۵}{۴}}{-\frac{۱۱}{۱۲}}\times\frac{۵}{۱۶}=-\frac{۵\times\overset{۳}{\cancel{۱۲}}}{\underset{۱}{\cancel{۴}}\times ۱۱}\times\frac{۵}{۱۶}=-\frac{۷۵}{۱۷۶}$

ت) $\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۸}\div(۳\div\frac{-۱۵}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۸}\div(۳\times\frac{۲}{-۱۵})=\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۸}\div(-\frac{۲}{۵})=\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۸}\times(-\frac{۵}{۲})=\frac{۳}{۲}+\frac{۳۵}{۱۶}=\frac{۲۴+۳۵}{۱۶}=\frac{۵۹}{۱۶}$

عددهای حقیقی

عدد گنگ (عدد اصم)

عدد گنگ عددی است که گویا نباشد. به‌عبارت دیگر، عدد گنگ عددی است که نتوان آن را به‌صورت $\frac{a}{b}$ نوشت که a و b اعداد صحیح هستند و $b\neq ۰$ در بخش قبل خواندیم که هر عدد گویا یا عددی مانند $۱/۵=\frac{۳}{۲}$ است که تعداد ارقام اعشاری آن متناهی است و یا عددی مانند $\frac{۷}{۱۱}$ است که نمایش اعشاری آن نامتناهی و دارای دورهٔ گردش است، یعنی: $\frac{۷}{۱۱}=۰/۶۳۶۳...=۰/\overline{۶۳}$

بنابراین برای عدد گنگ که گویا نیست تعریف دیگری به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

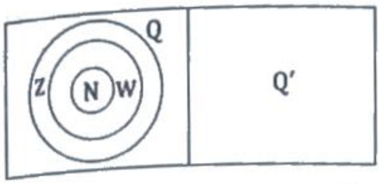
تعریف دیگر اعداد گنگ: عددی گنگ است که بسط اعشاری آن نامتناهی بوده و دارای دورهٔ گردش نباشد. به بیان دیگر عدد گنگ، عدد اعشاری بی‌پایان و بدون تکرار است. عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۷}$ ، ...۰/۳۴۳۴۴۳۴۴۴۳ و نظایر آن‌ها گنگ هستند.

- **مجموعهٔ اعداد گنگ را با نماد Q' نشان می‌دهند.**

- **عدد گنگ معروف دیگر عدد π است که در زیر، عدد π تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است اما در محاسبات حداکثر تا دو رقم اعشار π استفاده می‌شود:**

$\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹$

- **به‌طور کلی جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، گنگ می‌باشند مانند:** $\sqrt{۱۵}$ و $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۰/۹}$ و $\sqrt{۷/۳۵}$ و ...



در نمودار ون مجموعه‌های N ، W ، Z ، Q و Q' به‌صورت زیر می‌باشند.

$$N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q$$

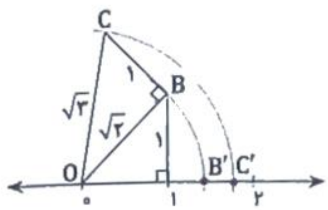
مجموعهٔ اعداد گویا و اعداد گنگ دو مجموعهٔ جدا از هم هستند. یعنی اشتراک ندارند. به بیان دیگر عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد. $Q\cap Q'=\varnothing$

مثال کدام عبارت درست و کدام عبارت نادرست است؟

الف) $\frac{۳}{۷}\in Q$ ب) $\sqrt{۵}\in Q'$ پ) $۲/۳۰۳۰۰۳۰۰۰۳۰...\in Q'$ ت) $-۳\in Q'$ ث) $\frac{\sqrt{۹}}{۴}\in Q'$ ج) $\sqrt{۷}\in Q$ چ) $\sqrt{۳/۷}\in Q'$

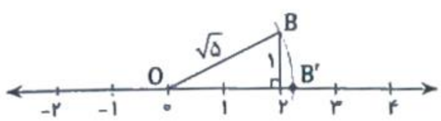
پاسخ: الف) درست ب) درست پ) درست ت) نادرست ث) نادرست $\frac{\sqrt{۹}}{۴}=\frac{۳}{۴}\in Q$ ج) نادرست چ) درست

نمایش هندسی اعداد گنگ



هر عدد گنگ متناظر با یک نقطه در روی محور اعداد می‌باشد. به‌عنوان مثال نقطهٔ نمایش عدد $\sqrt{۲}$ یک جایی بین دو عدد ۱ و ۲ در روی محور اعداد می‌باشد که برای یافتن محل دقیق $\sqrt{۲}$ در روی محور مطابق شکل، از روشی هندسی استفاده می‌کنیم اگر کمانی به مرکز O و شعاع $\overline{OB}$ رسم کنیم تا محور را در نقطهٔ B' قطع کند، B' نقطهٔ نمایش $\sqrt{۲}$ است. هم‌چنین مطابق شکل مقابل، اگر کمانی به مرکز O و شعاع $\overline{OC}$ رسم کنیم تا محور را در C' قطع کند، C' نقطهٔ نمایش عدد $\sqrt{۳}$ است.

مثال۱ نقطهٔ نمایش $\sqrt{۵}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.

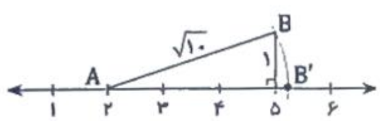


پاسخ: طبق شکل مقابل مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های قائمهٔ ۲ و ۱ تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$\overline{OB}^{۲}=۲^{۲}+۱^{۲}=۴+۱=۵\Rightarrow \overline{OB}=\sqrt{۵}$$

حال اگر کمانی به مرکز O و شعاع $\overline{OB}$ رسم کنیم تا محور را در B' قطع کند، B' نقطه نمایش $\sqrt{۵}$ است.

مثال۲ نقطهٔ نمایش $\sqrt{۱۰}+۲$ را روی محور اعداد مشخص کنید.



پاسخ: طبق شکل مقابل مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با ضلع‌های قائمهٔ ۱ و ۳ تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$\overline{AB}^{۲}=۳^{۲}+۱^{۲}=۱۰\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{۱۰}$$

حال کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم تا محور را در B' قطع کند، B' نقطهٔ نمایش $\sqrt{۱۰}+۲$ است

مثال۳ $\sqrt{۱۵}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

پاسخ: باید بررسی کنیم که عدد ۱۵ بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار دارد، یعنی

$$۳^{۲}<۱۵<۴^{۲}\Rightarrow ۹<۱۵<۱۶\Rightarrow \sqrt{۹}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}\Rightarrow ۳<\sqrt{۱۵}<۴$$

مثال۴ عدد $\sqrt{۷}+۲$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

پاسخ: $$۲^{۲}<۷<۳^{۲}\Rightarrow ۴<۷<۹\Rightarrow \sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹}\Rightarrow ۲<\sqrt{۷}<۳\Rightarrow ۲+۲<۲+\sqrt{۷}<۲+۳\Rightarrow ۴<۲+\sqrt{۷}<۵$$

مثال۵ بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید.

سخ: $$۲۵<۲۶<۲۸<۳۰<۳۳<۳۶\Rightarrow ۵<\sqrt{۲۶}<\sqrt{۲۸}<\sqrt{۳۰}<\sqrt{۳۳}<۶$$

اعداد $\sqrt{۲۶}$ ، $\sqrt{۲۸}$ ، $\sqrt{۳۰}$ ، $\sqrt{۳۳}$ چهار عدد گنگ بین ۵ و ۶ می‌باشند، البته مسئله می‌تواند بی‌شمار جواب‌های دیگری نیز داشته باشد.

مثال۶ بین دو عدد ۱ و ۲ هفت عدد گنگ بنویسید.

پاسخ: $$۱<۱/۲<۲<۲/۱<۲/۵<۳<۳/۴<۳/۹<۴\Rightarrow ۱<\underbrace{\sqrt{۱/۲}<\sqrt{۲}<\sqrt{۲/۱}<\sqrt{۲/۵}<\sqrt{۳}<\sqrt{۳/۴}<\sqrt{۳/۹}}_{\text{هفت عدد گنگ بین ۱ و ۲}}<۲$$

بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. به‌عنوان مثال بین $۲/۵$ و $۲/۶$ بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال۱ بین دو عدد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۱۰}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

پاسخ: $۳ < ۵ < ۶ < ۷ < ۸ < ۱۰ \Rightarrow \sqrt{۳} < \sqrt{۵} < \sqrt{۶} < \sqrt{۷} < \sqrt{۸} < \sqrt{۱۰}$

اعداد $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$ چهار عدد گنگ بین دو عدد گنگ $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۱۰}$ هستند

مثال۲ بین $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۱۰}$ پنج عدد گنگ مشخص کنید.

پاسخ:

$$۷ < ۷/۵ < ۸ < ۸/۳ < ۹/۴ < ۹/۷ < ۱۰ \Rightarrow \sqrt{۷} < \underbrace{\sqrt{۷/۵} < \sqrt{۸} < \sqrt{۸/۳} < \sqrt{۹/۴} < \sqrt{۹/۷}}_{\text{پنج عدد گنگ بین } \sqrt{۷} \text{ و } \sqrt{۱۰}} < \sqrt{۱۰}$$

بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال بین ۲ و $\sqrt{۵}$ چهار عدد گویا و چهار عدد گنگ مشخص کنید.

پاسخ: می‌دانیم: $\sqrt{۵} = ۲/۲۴$

$$۲ < \underbrace{۲/۰۴ < ۲/۰۹ < ۲/۲ < ۲/۲۰۳}_{\text{چهار عدد گویا بین } ۲ \text{ و } \sqrt{۵}} < \sqrt{۵}$$

$$۴ < ۴/۲ < ۴/۲۳ < ۴/۵ < ۴/۸ < ۵ \Rightarrow ۲ < \underbrace{\sqrt{۴/۲} < \sqrt{۴/۲۳} < \sqrt{۴/۵} < \sqrt{۴/۸}}_{\text{چهار عدد گنگ بین } ۲ \text{ و } \sqrt{۵}} < \sqrt{۵}$$

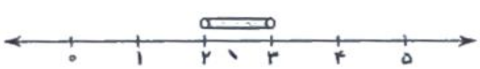
بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

جمع‌بندی: بین هر دو عدد روی محور، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وحود دارد.

مثال۱ مجموعهٔ A به‌صورت $A = \{x \in Q \mid ۳ \le x \le ۵\}$ را در نظر بگیرید، آیا نمایش A به‌صورت زیر صحیح است؟

پاسخ: خیر، زیرا بین ۳ و ۵ بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد که در نمایش مقابل در نظر گرفته شده ولی طبق تعریف مجموعهٔ A ، اعداد گنگ جزء مجموعهٔ A نیستند. زیرا مجموعهٔ A اعداد گویای بین ۳ و ۵ را معرفی می‌کند به‌عنوان مثال: $\sqrt{۱۰} \notin A$

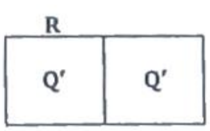
مثال۲ مجموعهٔ A به‌صورت $A = \{x \in Q' \mid ۲ < x < ۳\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به‌صورت زیر صحیح است؟



پاسخ: خیر، زیرا بین ۲ و ۳ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد که در نمایش مقابل در نظر گرفته شده ولی طبق تعریف مجموعهٔ A، اعداد گویا عضو مجموعهٔ A نیستند زیرا مجموعهٔ A اعداد گنگ بین ۲ و ۳ را معرفی می‌کند. به‌عنوان مثال: $\frac{۵}{۲} \notin A$

اعداد حقیقی

اعداد به دو دستهٔ جدا ازهم، اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند. اجتماع مجموعهٔ تمام اعداد گویا و اعداد گنگ را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌گویند و با نماد R نشان می‌دهند، پس داریم: $R = Q \cup Q'$



مثال

$۵ \in R \;,\; \frac{-۶}{۷} \in R \;,\; \sqrt{۲} \in R \;,\; \pi \in R \;,\; \sqrt{۷} \in R \;,\; ۳/۲۴ \in R \;,\; ۵/\overline{۳} \in R \;,\; ۲/۷\overline{۳} \in R$

$(۳ + \sqrt{۵}) \in R \;,\; -(۱ + \sqrt{۳}) \in R \;,\; ۰/۰۵۰۵۵۰۵۵۵۰۵۵۵۵... \in R$

اگر مخرج یک کسر صفر باشد، حاصل آن بی‌معنی است و عدد حقیقی نمی‌باشد. $\frac{۴}{۰} \notin R$

مثال داخل $\square$ علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

الف) $-۳ \square Z$ ب) $\frac{-۶}{۳} \square N$ پ) $۰/۴۷ \square Q$ ت) $\sqrt{۱۷} \square R$ ث) $\frac{۹}{۰} \square R$ ج) $-\sqrt{۹} \square R$

چ) $\sqrt{۰/۴} \square Q$ ح) $\sqrt{۰/۸۱} \square Q$ خ) $\sqrt{۵/۷} \square Q'$ د) $(۳-\sqrt{۲}) \square R$ ذ) $\frac{۳}{۷} \square R$ ر) $\frac{۰}{۵} \square R$

پاسخ: الف) $\in$ ب) $\notin$ ب) $\in$ ت) $\in$ ث) $\notin$ ج) $\in$ ج) $\notin$ ح) $\in$ خ) $\in$ د) $\in$ ذ) $\in$ ر) $\in$

مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد گنگ زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی هستند یعنی؛ $Q' \subseteq R$ و $Q \subseteq R$

مثال به تساوی‌های زیر دقت کنید.

الف) $Q \cap N = N$ ب) $Q' \cap Z = \varnothing$ پ) $Q' \cap R = Q'$ ت) $Q \cap R = Q$

ث) $Q \cup N = Q$ ج) $Q' \cup Q = R$ چ) $Q \cup R = R$ ح) $N \cup Z = Z$

محور اعداد حقیقی: اعداد حقیقی را می‌توان روی یک محور نشان داد که به این محور، محور اعداد حقیقی می‌گویند

هر نقطه روی این محور نشان دهندهٔ یک عدد گویا و یا یک عدد گنگ است.
باید دانست که یک تناظر یک به یک بین مجموعهٔ اعداد حقیقی و نقاط روی محور اعداد حقیقی وجود دارد. به‌عبارتی هر عدد حقیقی فقط یک نقطه را روی محور اعداد حقیقی نشان می‌دهد و هر نقطه روی محور اعداد حقیقی، نمایش یک عدد حقیقی منحصر به‌فرد است.

- **روی محور اعداد حقیقی، بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد حقیقی گویا و گنگ وجود دارد.**
- **مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب دو عدد گویا، عددی گویا است.**
- **خارج‌قسمت دو عدد گویا به شرط آن‌که مخرج یا مقسوم‌علیه صفر نباشد، عددی گویا است.**
- **مجموع و تفاضل یك عدد گویا و یك عدد گنگ، عددی گنگ است.**

مثال الف) $۳ \to$ عدد گویا ب) $\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ ب) $۳+\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ

ت) $۳-\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ ث) $\sqrt{۵}-۳ \to$ عدد گنگ

- **حاصل‌ضرب عدد گویای غیر از صفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.**

مثال الف) $۳ \to$ عدد گویا و $\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ $\Rightarrow ۳\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ

ب) $۰ \to$ عدد گویا و $\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ $\Rightarrow ۰ \times \sqrt{۵} = ۰ \to$ عدد گویا

- **خارج‌قسمت تقسیم عدد گنگ و عدد گویای غیر از صفر برهم، عددی گنگ است.**

مثال الف) $۳ \to$ عدد گویا و $\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ $\Rightarrow \frac{۳}{\sqrt{۵}}$ و $\frac{\sqrt{۵}}{۳} \to$ هر دو عدد گنگ

ب) $۰ \to$ عدد گویا و $\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ $\Rightarrow \frac{۰}{\sqrt{۵}} = ۰ \to$ عدد گویا و $\frac{\sqrt{۵}}{۰} = ۰ \to$ تعریف نشده

- **معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.**

مثال ۱ $\sqrt{۵} \to$ عدد گنگ $\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۵}} \to$ عدد گنگ

مثال ۲ دو عدد گنگ مثال بزنید که حاصل‌جمع آن‌ها عددی گویا باشد.

پاسخ: $a = \sqrt{۲}$ و $b = ۴-\sqrt{۲} \Rightarrow a+b = \sqrt{۲}+۴-\sqrt{۲} = ۴ \to$ عددی گویا

مثال ۳ دو عدد گنگ مثال بزنید که تفریق آن‌ها عددی گویا باشد.

پاسخ: $a=۵+\sqrt{۳}$ و $b=۱+\sqrt{۳} \Rightarrow a-b=۵+\sqrt{۳}-۱-\sqrt{۳}=۴ \rightarrow$ عدد گویا

مثال ۴ دو عدد گنگ مثال بزنید که حاصل‌ضرب آن‌ها عددی گویا باشد.

پاسخ: $a=\sqrt{۲}$ عدد گنگ و $b=\sqrt{۸} \rightarrow$ عدد گنگ $\rightarrow a\cdot b=\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۶}=۴ \rightarrow$ عدد گویا

مثال ۵ دو عدد گنگ مثال بزنید که خارج‌قسمت تقسیم آن‌ها عددی گویا باشد.

پاسخ: $a=\sqrt{۸} \rightarrow$ عدد گنگ و $b=\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ $\rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۸}{۲}}=\sqrt{۴}=۲ \rightarrow$ عدد گویا

مجموع و تفاضل دو عدد گنگ ممکن است گنگ یا گویا باشد.

مثال $\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ و $\sqrt{۳} \rightarrow$ عدد گنگ $\Rightarrow \sqrt{۲}+\sqrt{۳} \rightarrow$ **عدد گنگ** و $\sqrt{۳}-\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ

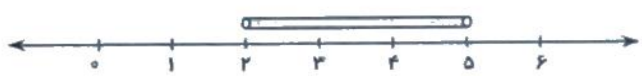
حاصل‌ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است گنگ یا گویا باشد.

مثال ۱ $\sqrt{۲} \rightarrow$ عدد گنگ و $\sqrt{۳} \rightarrow$ عدد گنگ $\Rightarrow \sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶} \rightarrow$ عدد گنگ و $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}} \rightarrow$ عدد گنگ

مثال ۲ مجموعه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

$A=\{x\in R \mid -۲\le x\le ۳\}$

$B=\{x\in R \mid ۲<x<۵\}$



$C=\{x\in R \mid -۱<x\le ۳\}$

$D=\{x\in R \mid x\ge ۳\}$

$E=\{x\in R \mid x>۲\}$

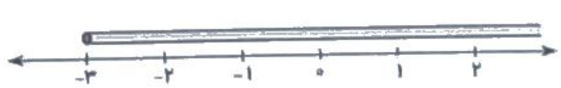
$F=\{x\in R \mid x<۳\}$

مثال ۳ مجموعه‌های زیر را که روی محور نشان داده شده است به‌صورت ریاضی بنویسید.

الف)

ب)

پ)



ت)

پاسخ: ت) $\{x\in R \mid x\le ۰\}$ پ) $\{x\in R \mid x\ge -۳\}$ ب) $\{x\in R \mid -۲\le x\le ۱\}$ الف) $\{x\in R \mid ۰\le x<۳\}$

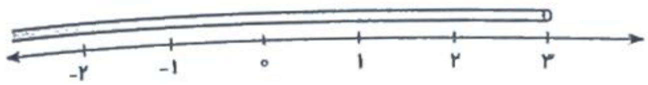
مثال ۴ در هر حالت تفاوت دو مجموعهٔ زیر را با ذکر دلیل بنویسید.

الف) $A=\left\{x\in R \mid -\frac{۳}{۲}<x<۲\right\}$ و $B=\left\{x\in Q \mid -\frac{۳}{۲}<x<۲\right\}$

ب) $C=\{x\in Z \mid x<۳\}$ و $D=\{x\in R \mid x<۳\}$

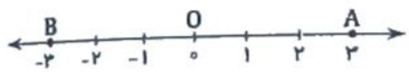
پاسخ: الف) مجموعهٔ A تمام اعداد حقیقی بین $-\frac{۳}{۲}$ و ۲ را معرفی می‌کند، ولی مجموعهٔ B اعداد گویای بین $-\frac{۳}{۲}$ و ۲ را معرفی می‌کند. بنابراین این دو مجموعه یکسان نیستند، بلکه B زیرمجموعهٔ A است. $B\subseteq A$

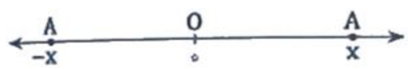
ب) مجموعهٔ C اعداد صحیح کوچک‌تر از ۳ را معرفی می‌کند. یعنی $C=\{۲ \text{ و } ۱ \text{ و } ۰ \text{ و } -۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\}$، ولی D تمام اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳ را معرفی می‌کند، پس برابر نیستند بلکه: $C\subseteq D$

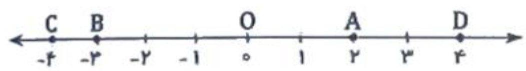


قدرمطلق و محاسبهٔ تقریبی

در شکل زیر فاصلهٔ نقطه‌های A و B تا مبدأ O برابر ۳ می‌باشد، یعنی طول پاره‌خط‌های OA و OB هردو برابر ۳ است. فاصلهٔ یک نقطه روی محور تا مبدأ همواره عددی مثبت است، صرف‌نظر از این‌که آن نقطه در قسمت مثبت یا منفی محور باشد. بنابراین برای نمایش فاصلهٔ یک نقطه روی محور تا مبدأ از نمادی به نام قدرمطلق استفاده می‌کنند. اگر A نقطه‌ای به طول x روی محور اعداد حقیقی باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A تا مبدأ را با نمادی به‌صورت $|x|$ نشان می‌دهند. یعنی: $\overline{OA}=|x|$ فاصلهٔ A تا مبدأ







مثال $\overline{OA}=|۲|=۲$ و $\overline{OB}=|-۳|=۳$

$\overline{OC}=|-۴|=۴$ و $\overline{OD}=|۴|=۴$

قدرمطلق عدد صفر برابر صفر است و قدرمطلق اعداد مثبت برابر خود آن عدد است و قدرمطلق اعداد منفی، قرینهٔ آن عدد است، یعنی:

$$x=۰ \Rightarrow |x|=|۰|=۰$$
$$x>۰ \Rightarrow |x|=x$$
$$x<۰ \Rightarrow |x|=-x$$

یا

$$|x|=\begin{cases} x & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

نتیجه: اگر داخل قدر مطلق مثبت باشد، حاصل قدرمطلق، خود آن عبارت است و اگر داخل قدرمطلق منفی باشد، حاصل قدرمطلق برابر با قرینهٔ داخل قدرمطلق است.

مثال الف) $|۵|=۵$ ب) $|-۶|=-(-۶)=۶$ ب) $|-۹|=-(-۹)=۹$

در حالت کلی برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x|=|-x|$

مثال۱ الف) $|۵|=|-۵|=۵$ ب) $|-۶|=|۶|=۶$

مثال۲ به حاصل عبارت‌هایی که به‌دست آمده توجه کنید.

الف) $|۵۰-۲\times۱۰-۴۰|=|۵۰-۲۰-۴۰|=|-۱۰|=۱۰$

ب) $|۳^۲+۴-۱۰|=|۹+۴-۱۰|=|۳|=۳$

ب) $|۵+۰/۷-۱|=|۴/۷|=۴/۷$

چند تذکر:

۱- عدد a مثبت می‌باشد، یعنی $a>۰$

۲- عدد a منفی می‌باشد، یعنی $a<۰$

۳- عدد a نامنفی می‌باشد، یعنی $a\geq۰$

۴- عدد a نامثبت می‌باشد، یعنی $a\leq۰$

مثال۱ اگر a و b هردو مثبت باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

پاسخ: چون a و b هردو مثبت هستند، پس مجموع آن‌ها نیز مثبت است:

الف) $|a|-|b|+|a+b|=a-b+a+b=۲a$

ب) $|۲a|+|b|-|a+b|=۲a+b-(a+b)=۲a+b-a-b=a$

مثال۲ اگر a مثبت و b منفی باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

پاسخ: چون a مثبت و b منفی است، حاصل $a-b$ مثبت است و حاصل $b-a$ عدد منفی است.

الف) $|a|+|b|-|a-b|=a+(-b)-(a-b)=a-b-a+b=۰$

ب) $|b-a|-|a|-|b|=-(b-a)-a-(-b)=-b+a-a+b=۰$

مثال۳ اگر a و b هردو منفی باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

پاسخ: چون a و b هردو منفی هستند پس مجموع آن‌ها نیز منفی است:

الف) $|a+b|-|a|+|b|=-(a+b)-(-a)+(-b)=-a-b+a-b=-۲b$

ب) $|-a|-|b|-|a+b|=-a-(-b)-(-a-b)=-a+b+a+b=۲b$

قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد، برابر حاصل‌ضرب قدرمطلق آن‌ها است. به زبان ریاضی یعنی اگر x و y دو عدد حقیقی باشند داریم:

$$|x\cdot y|=|x||y|$$

مثال $|۵x|=|۵||x|=۵|x|$ و $|-۶x|=|-۶||x|=۶|x|$

قدرمطلق تقسیم دو عدد، برابر حاصل تقسیم قدرمطلق آن‌ها است. یعنی برای x و y حقیقی $(y\neq ۰)$ داریم: $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$

مثال۱ الف) $|\frac{۵}{x}|=\frac{|۵|}{|x|}=\frac{۵}{|x|}$ ب) $|\frac{x}{-۲}|=\frac{|x|}{|-۲|}=\frac{|x|}{۲}$

مثال۲ آیا برای هر a و b حقیقی رابطهٔ $|a+b|=|a|+|b|$ برقرار است؟

پاسخ: خیر، زیرا اگر $a=۲$ و $b=-۷$ را درنظر بگیریم، داریم:

$|۲+(-۷)|=|۲|+|-۷|\Rightarrow|-۵|=|۲|+|-۷|\Rightarrow ۵=۲+۷$ غلط

در حالت کلی برای هردو عدد a و b رابطهٔ $|a+b|\leq|a|+|b|$ برقرار می‌باشد.

برای بعضی محاسبه‌ها بهتر است مقدار تقریبی عددهای زیر را که تا یک رقم اعشار نوشته شده، به ذهن بسپاریم:

$\sqrt{۲}\simeq۱/۴$ و $\sqrt{۳}\simeq۱/۷$ و $\sqrt{۵}\simeq۲/۲$ و $\sqrt{۶}\simeq۲/۴$ و $\sqrt{۷}\simeq۲/۶$ و $\sqrt{۸}\simeq۲/۸$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $|\sqrt{۲}-۱|=\sqrt{۲}-۱$

ب) $|۱-\sqrt{۳}|=-(۱-\sqrt{۳})=-۱+\sqrt{۳}=\sqrt{۳}-۱$

پ) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=-(\sqrt{۳}-\sqrt{۵})=-\sqrt{۳}+\sqrt{۵}=\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

ت) $|-۲+\sqrt{۸}|=-۲+\sqrt{۸}=\sqrt{۸}-۲$

ث) $|۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}-۳|=|۲\sqrt{۲}-۳|=-۲\sqrt{۲}+۳$

ج) $|\sqrt{۹}-\sqrt{۱۱}|=|۳-\sqrt{۱۱}|=-۳+\sqrt{۱۱}=\sqrt{۱۱}-۳$

چ) $|\sqrt{۵}-\sqrt{۲}|=\sqrt{۵}-\sqrt{۲}$

ح) $|-۱-\sqrt{۷}|=-(-۱-\sqrt{۷})=۱+\sqrt{۷}$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $|۱-\sqrt{۵}|+|\sqrt{۵}-۲|=-۱+\sqrt{۵}+\sqrt{۵}-۲=۲\sqrt{۵}-۳$

ب) $|۳-\sqrt{۲}|-|\sqrt{۲}-۴|=۳-\sqrt{۲}-(-\sqrt{۲}+۴)=۳-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۴=-۱$

مثال۳ اگر $a=-۲$ ، $b=\sqrt{۳}$ و $c=\frac{۱}{۳}$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $|a+b-c|=|-۲+\sqrt{۳}-\frac{۱}{۳}|=|-۲-\frac{۱}{۳}+\sqrt{۳}|=-(-۲-\frac{۱}{۳}+\sqrt{۳})=۲+\frac{۱}{۳}-\sqrt{۳}=\frac{۷}{۳}-\sqrt{۳}$

ب) $|a+b+c|-|a-b|=|-۲+\sqrt{۳}+\frac{۱}{۳}|-|-۲-\sqrt{۳}|=|-\frac{۵}{۳}+\sqrt{۳}|-|-۲-\sqrt{۳}|=-\frac{۵}{۳}+\sqrt{۳}-(۲+\sqrt{۳})=-\frac{۱۱}{۳}$

مثال۴ حاصل عبارت $\sqrt{x^۲}$ را به ازای مقادیر داده شده به‌دست آورید.

الف) $x=۳ \Rightarrow \sqrt{x^۲}=\sqrt{(۳)^۲}=\sqrt{۹}=۳$

ب) $x=-۴ \Rightarrow \sqrt{x^۲}=\sqrt{(-۴)^۲}=\sqrt{+۱۶}=۴$

پ) $x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲}=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$

ت) $x=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲}=\sqrt{(-\frac{۳}{۲})^۲}=\sqrt{+\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}$

با توجه به تمرین قبل برای هر عدد حقیقی x داریم: $\sqrt{x^۲}=|x|$

مثال

الف) $\sqrt{۵^۲}=|۵|=۵$

ب) $\sqrt{(-۶)^۲}=|-۶|=+۶$

توجه داشته باشید که دو عبارت $\sqrt{(-۳)^۲}$ و $\sqrt{-۳^۲}$ متفاوت هستند و داریم: $\sqrt{-۳^۲}=\sqrt{-۹}=$ بی معنی و $\sqrt{(-۳)^۲}=|-۳|=۳$

توجه داشته باشید که در زیر رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی نمی‌تواند وجود داشته باشد، پس $\sqrt{-۹}$ یک عبارت بی معنی است.

مثال۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$

ب) $\sqrt{(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})^۲}=|\sqrt{۵}-\sqrt{۲}|=\sqrt{۵}-\sqrt{۲}$

پ) $\sqrt{(۳-\sqrt{۲})^۲}-\sqrt{(\sqrt{۲}-۵)^۲}=|۳-\sqrt{۲}|-|\sqrt{۲}-۵|=۳-\sqrt{۲}-(۵-\sqrt{۲})=۳-\sqrt{۲}-۵+\sqrt{۲}=-۲$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $|۵^۴-۵^۵| \Rightarrow ۵^۴<۵^۵ \Rightarrow ۵^۴-۵^۵<۰ \Rightarrow |۵^۴-۵^۵|=-(۵^۴-۵^۵)=۵^۵-۵^۴$

ب) $|(۰/۲)^۵-(۰/۲)^۷| \Rightarrow (۰/۲)^۵>(۰/۲)^۷ \Rightarrow (۰/۲)^۵-(۰/۲)^۷>۰ \Rightarrow |(۰/۲)^۵-(۰/۲)^۷|=(۰/۲)^۵-(۰/۲)^۷$

پ) $|۹^۵-۱۰^۵| \Rightarrow ۹^۵<۱۰^۵ \Rightarrow ۹^۵-۱۰^۵<۰ \Rightarrow |۹^۵-۱۰^۵|=-(۹^۵-۱۰^۵)=۱۰^۵-۹^۵$

ت) $|(۰/۷)^۴-(۰/۳)^۴| \Rightarrow (۰/۷)^۴>(۰/۳)^۴ \Rightarrow (۰/۷)^۴-(۰/۳)^۴>۰ \Rightarrow |(۰/۷)^۴-(۰/۳)^۴|=(۰/۷)^۴-(۰/۳)^۴$

اگر k عددی مثبت باشد داریم: $|x|=k \Rightarrow x=\pm k$

مثال در هر عبارت مقدار x را بیابید.

الف) $|x|=۷ \Rightarrow x=\pm ۷$

ب) $|x|=-۳ \rightarrow$ غیرممکن است زیرا حاصل قدرمطلق منفی نمی‌شود

پ) $|x-۱|=۴ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۴ \Rightarrow x=۵ \\ x-۱=-۴ \Rightarrow x=-۳ \end{cases}$

ت) $|x+۲|=۵ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۵ \Rightarrow x=۳ \\ x+۲=-۵ \Rightarrow x=-۷ \end{cases}$