## معرفی مجموعه

**تعریف:** در ریاضی از واژهٔ مجموعه «برای نشان دادن دسته یا گروهی از اشیاء مشخص و متمایز (غیرتکراری) استفاده می‌شود.»

**در یک مجموعه عضویت اشیاء باید کاملاً مشخص باشد.**

**مثال۱** **برای هر یک از عبارت‌های زیر در صورت امکان یک مجموعه تشکیل دهید.**

**الف) چهار سینمای معروف:** نمی‌توان یک مجموعه تشکیل داد زیرا اعضای مجموعه مشخص نیستند.

**ب) اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰:** می‌توان یک مجموعه تشکیل داد زیرا اعضای مجموعه مشخص است و عبارت‌اند از: {۷ و ۵ و ۳ و ۲}

**پ) حروف سه نقطهٔ الفبای فارسی:** می‌توان یک مجموعه تشکیل داد و اعضای آن عبارت‌اند از: { پ، ژ، چ، ث، ش }

**ت) سه حرف الفبای انگلیسی:** نمی‌توان یک مجموعه تشکیل داد.

**ث) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰:** می‌توان مجموعه تشکیل داد: {... و ۱۰۰۰۰۳ و ۱۰۰۰۰۲ و ۱۰۰۰۰۱}

---

**مثال۲** آیا نحوهٔ نوشتن مجموعهٔ B = {۵- و ۱ و ۷ و ۵- و ۳} صحیح است؟ چرا؟

**پاسخ:** خیر، زیرا اعضای هر مجموعه باید متمایز باشند، در صورتی‌که ۵- دوبار تکرار شده است. پس به‌صورت B = {۱ و ۷ و ۵- و ۳} صحیح است.

---

**اعضای یک مجموعه را داخل دو آکلاد { } قرار می‌دهند.**

**مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی (... ، C ، B و A) نام‌گذاری می‌کنند.**

**اعضای مجموعه را معمولاً با علامت « , » یا « ، » یا « و » از یک‌دیگر جدا می‌کنند.**

**در نوشتن اعضای یک مجموعه، جابه‌جایی اعضا مهم نیست.**

**مثال** **مجموعهٔ شمارنده‌های اول عدد ۳۰ را بنویسید.**

**پاسخ:** {۲ و ۵ و ۳} یا {۲ و ۳ و ۵} یا {۵ و ۳ و ۲} همه صحیح هستند.


---

## عضویت و عدم عضویت

در مثالی که داشتیم به هر یک از دانش‌آموزان گروه تئاتر یک عضو مجموعهٔ T می‌گویند. بنابراین مجموعهٔ T ، ۵ عضو دارد.

برای آن‌که نشان دهیم هاجر عضو مجموعهٔ T است، می‌بایست از نماد « T ∈ هاجر» استفاده کنیم و می‌خوانیم: «هاجر متعلق است به مجموعهٔ T » یا «هاجر عضو مجموعهٔ T است».

**تعریف:** اگر تعداد اعضای دو مجموعهٔ A و B یکسان باشند و هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد، در این‌صورت دو مجموعهٔ A و B برابر هستند و می‌نویسیم: A = B

**مثال۱** اگر {سه عدد فرد متوالی که میانگین آن‌ها برابر ۵ باشد} = C و {اعداد اول بین ۲ و ۸} = D باشد، آیا مجموعهٔ C و D باهم مساوی هستند؟

**پاسخ:** {۷ و ۵ و ۳} = C و {۷ و ۵ و ۳} = D

مجموعهٔ C و D شامل ۳ عضو هستند و هر عضو C عضوی از D و هر عضو D ، عضوی از C است. پس C = D است.

---

**مثال۲** در مجموعه‌های زیر جاهای خالی را طوری کامل کنید که دو مجموعه برابر باشند.

**پاسخ:** ۱۷ عضو مجموعهٔ سمت راست و ۶ عضو مجموعهٔ سمت چپ است. {$۵\frac{۵}{۵}$ و $\frac{\sqrt{۱۲۱}}{۱۱}$ و ... و ... و ۴- و $\frac{۷}{۲}$} = {$\frac{-۲^{۴}}{۲^{۲}}$ و ... و ۱ و ۳/۵ و ۱۷}

---

**مثال۳** اگر مجموعهٔ A شامل شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ و مجموعهٔ B شامل اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷ باشد، آیا A = B است؟ چرا؟

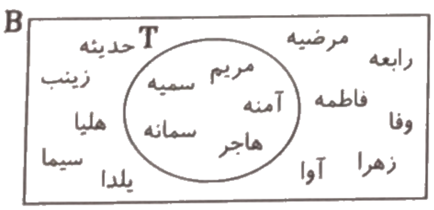
**پاسخ:** خیر، زیرا {۶ و ۳ و ۲ و ۱} = A و {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} = B است. عدد ۴ و ۵ عضو B هستند، ولی در A نیستند.

---

**اگر عضوی در A باشد که در B نباشد، یا عضوی در B باشد که در A نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ A و B باهم برابر نیستند و می‌نویسیم: $A \neq B$**

## زیر مجموعه

اگر در مثال بخش قبل مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس نهم «ب» را با B و دانش‌آموزان گروه تئاتر را با T نشان دهیم، می‌توانیم نمودار ون این دو مجموعه را به‌صورت مقابل نشان دهیم.




با توجه به نمودار مقابل هر عضو T (گروه تئاتر) عضوی از B (کلاس نهم ب) است. پس می‌توان گفت که مجموعهٔ T زیر مجموعهٔ مجموعهٔ B است.

**تعریف:** اگر A و B دو مجموعه باشند و همهٔ اعضای مجموعهٔ A عضو مجموعهٔ B باشد، در این‌صورت A زیر مجموعهٔ B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$

**مثال۱**

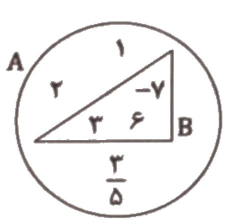
**الف)** {دانش‌آموزان کلاس شما} ⊆ {دانش‌آموزان مدرسهٔ شما}

**ب)** {مربع‌ها} ⊆ {چهارضلعی‌ها}

**پ)** {اعداد اول} ⊆ N ( N مجموعهٔ اعداد طبیعی است)

---

**مثال۲** با توجه به نمودار مقابل مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص کنید و تحقیق کنید که آیا $B \subseteq A$ برقرار است یا خیر؟

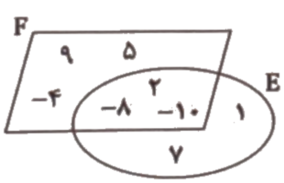



**پاسخ:** {۷- و ۶ و ۳} = B و {$\frac{۳}{۵}$ و ۷- و ۶ و ۳ و ۲ و ۱} = A

می‌توان مشاهده کرد که تمام عضوهای مجموعهٔ B در مجموعهٔ A است. پس خواهیم داشت: $B \subseteq A$

---

**مثال۳** با توجه به نمودار مقابل مجموعه‌های F و E را با اعضا مشخص کنید و تحقیق کنید که آیا $E \subseteq F$ برقرار است یا خیر؟




**پاسخ:** {۱۰- و ۸- و ۴- و ۹ و ۵ و ۲} = F و {۱۰- و ۸- و ۷ و ۲ و ۱} = E

می‌توان مشاهده کرد که اعداد ۱ و ۷ عضو E هستند ولی عضو F نیستند. یعنی مجموعهٔ E زیرمجموعهٔ F نیست.

در این صورت می‌نویسیم: $E \not\subseteq F$

وفا عضو مجموعهٔ T نیست. این مطلب را به‌صورت «T ∉ وفا» نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «وفا متعلق به مجموعهٔ T نیست» یا «وفا عضو مجموعهٔ T نیست». بنابراین ∈ را علامت عضویت و ∉ را علامت عدم عضویت می‌گویند.

**مثال ۱** **الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶ را به‌صورت یک مجموعه نوشته و آن را A بنامید.**

**پاسخ:** A = {۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵}

**ب) عبارت‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید. (با علامت ∈ یا ∉)**

۱) عدد ۲ عضو مجموعهٔ A است: A ∋ ۲      ۲) عدد ۶ عضو مجموعهٔ A نیست: ۶ ∉ A

---

**مثال ۲** **اگر F = {-۹ و -۸ و -۷ و ... و ۹} باشد، درستی یا نادرستی عبارت‌ها را مشخص کنید.**

الف) ۵ ∉ F ← نادرست      ب) ۰ ∈ F ← درست      پ) -۵ ∈ F ← درست

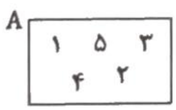
---

## نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار وِن

گاهی اوقات اعضای مجموعه را داخل یک منحنی بسته یا خط شکسته قرار می‌دهند که به این نوع نمایش مجموعه‌ها، نمودار وِن می‌گویند.

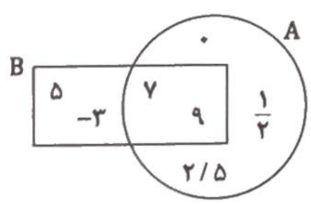
**مثال ۱** **با توجه به مثال بالا مجموعهٔ A را با نمودار وِن نشان دهید.**

**پاسخ:**




---

**مثال ۲** **با توجه به نمودار وِن اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص نمایید.**




**پاسخ:** B = {-۳ و ۵ و ۷ و ۹} و A = {۰ و $\frac{۱}{۲}$ و ۲/۵ و ۷ و ۹}

---

## مجموعه تهی

**تعریف:** مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعهٔ تهی می‌نامند و به‌صورت ∅ یا { } نمایش می‌دهند. علامت ∅ یکی از حروف یونانی است که به آن فی می‌گویند.

**مثال ۱** **مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از یک را نشان دهید.**

**پاسخ:** { } یا ∅

---

**مثال ۲** **کدام‌یک از عبارت‌های زیر یک مجموعهٔ تهی است؟**

**الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی بین -۳ و -۴**      **ب) مجموعهٔ مضرب‌های عدد ۷ که اول هستند.**

**پ) مجموعهٔ حروف چهار نقطهٔ الفبای فارسی.**

**پاسخ:** قسمت (الف) و (پ) یک مجموعهٔ تهی هستند.

## مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

## دو مجموعه برابر

مجموعهٔ A شامل اعداد طبیعی و دو رقمی زوج کوچک‌تر از ۲۰ است.      A = {۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۸}

مجموعهٔ B شامل مضرب‌های عدد ۲ بین ۹ و ۱۹ است.      B = {۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۸}

الف) هر یک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ پاسخ: مجموعهٔ A شامل ۵ عضو و مجموعهٔ B شامل ۵ عضو است.

ب) آیا هر عضو A در مجموعهٔ B است؟ پاسخ: بله      پ) آیا هر عضو B در مجموعهٔ A است؟ پاسخ: بله

**تعریف:** اگر تعداد اعضای دو مجموعهٔ $A$ و $B$ یکسان باشند و هر عضو $A$ ، عضوی از $B$ و هر عضو $B$ ، عضوی از $A$ باشد، در این‌صورت دو مجموعهٔ $A$ و $B$ برابر هستند و می‌نویسیم: $A = B$

**مثال ۱** اگر {سه عدد فرد متوالی که میانگین آن‌ها برابر ۵ باشد} = $C$ و {اعداد اول بین ۲ و ۸} = $D$ باشد، آیا مجموعهٔ $C$ و $D$ باهم مساوی هستند؟

**پاسخ:** {۷ و ۵ و ۳} = $C$ و {۷ و ۵ و ۳} = $D$

مجموعهٔ $C$ و $D$ شامل ۳ عضو هستند و هر عضو $C$ عضوی از $D$ و هر عضو $D$ ، عضوی از $C$ است. پس $C = D$ است.

---

**مثال ۲** در مجموعه‌های زیر جاهای خالی را طوری کامل کنید که دو مجموعه برابر باشند.

**پاسخ:** ۱۷ عضو مجموعهٔ سمت راست و ۶ عضو مجموعهٔ سمت چپ است. {$\frac{۵}{۵}$ و ۵ و $\frac{\sqrt{۱۲۱}}{۱۱}$ و ... و ۴− و $\frac{۷}{۲}$} = {$\frac{-۲^{۴}}{۲^{۲}}$ و ... و ۱ و ۳/۵ و ۱۷}

---

**مثال ۳** اگر مجموعهٔ $A$ شامل شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ و مجموعهٔ $B$ شامل اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷ باشد، آیا $A = B$ است؟ چرا؟

**پاسخ:** خیر، زیرا {۶ و ۳ و ۲ و ۱} = $A$ و {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} = $B$ است. عدد ۴ و ۵ عضو $B$ هستند، ولی در $A$ نیستند.

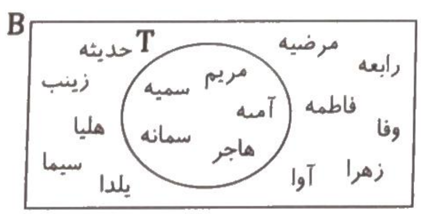
---

**اگر عضوی در $A$ باشد که در $B$ نباشد، یا عضوی در $B$ باشد که در $A$ نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ $A$ و $B$ باهم برابر نیستند و می‌نویسیم: $A \neq B$**

## زیر مجموعه

اگر در مثال بخش قبل مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس نهم «ب» را با $B$ و دانش‌آموزان گروه تئاتر را با $T$ نشان دهیم، می‌توانیم نمودار ون این دو مجموعه را به‌صورت مقابل نشان دهیم.

با توجه به نمودار مقابل هر عضو $T$ (گروه تئاتر) عضوی از $B$ (کلاس نهم ب) است. پس می‌توان گفت که مجموعهٔ $T$ زیر مجموعهٔ مجموعهٔ $B$ است.




**تعریف:** اگر $A$ و $B$ دو مجموعه باشند و همهٔ اعضای مجموعهٔ $A$ عضو مجموعهٔ $B$ باشد، در این‌صورت $A$ زیر مجموعهٔ $B$ است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$

**مثال ۱**

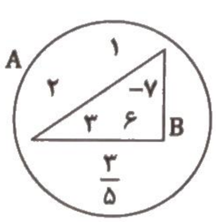
الف) {دانش‌آموزان کلاس شما} $\subseteq$ {دانش‌آموزان مدرسهٔ شما}

ب) {مربع‌ها} $\subseteq$ {چهارضلعی‌ها}

پ) {اعداد اول} $\subseteq N$ ($N$ مجموعهٔ اعداد طبیعی است)

---

**مثال ۲** با توجه به نمودار مقابل مجموعه‌های $A$ و $B$ را با اعضا مشخص کنید و تحقیق کنید که آیا $B \subseteq A$ برقرار است یا خیر؟




**پاسخ:** {۷− و ۶ و ۳} = $B$ و {$\frac{۳}{۵}$ و ۷− و ۶ و ۳ و ۲ و ۱} = $A$

می‌توان مشاهده کرد که تمام عضوهای مجموعهٔ $B$ در مجموعهٔ $A$ است. پس خواهیم داشت: $B \subseteq A$

---

**مثال ۳** با توجه به نمودار مقابل مجموعه‌های $F$ و $E$ را با اعضا مشخص کنید و تحقیق کنید که آیا $E \subseteq F$ برقرار است یا خیر؟


**پاسخ:** {۱۰− و ۸− و ۴− و ۹ و ۵ و ۲} = $F$ و {۱۰− و ۸− و ۷ و ۲ و ۱} = $E$

می‌توان مشاهده کرد که اعداد ۱ و ۷ عضو $E$ هستند ولی عضو $F$ نیستند. یعنی مجموعهٔ $E$ زیرمجموعهٔ $F$ نیست.

در این صورت می‌نویسیم: $E \nsubseteq F$

اگر A و B دو مجموعه باشند و عضوی در مجموعهٔ A باشد که در مجموعهٔ B نباشد، پس مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم: $A \nsubseteq B$

هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است: $A \subseteq A$

**مثال** اگر $A = \{۱- ، ۳ ، \frac{۴}{۵}\}$ باشد، تحقیق کنید آیا $A \subseteq A$ است؟

**پاسخ:** بله، زیرا هر عضو A در خود مجموعهٔ A قرار دارد.

---

**مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواهی است:** $\varnothing \subseteq A$

**مثال۱** درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را مشخص کرده و دلیل آن را بنویسید.

**الف)** حروف الفبای انگلیسی $\subseteq \{a ، o ، i ، e ، u\}$: درست است، همهٔ حروف مجموعهٔ سمت چپ در بین حروف الفبای انگلیسی هستند.

**ب)** $\{۵ ، ۴ ، ۳- ، ۷ ، ۱ ، ۰\} \nsubseteq \{۵ ، ۳- ، ۰\}$: نادرست است، زیرا هر عضو مجموعهٔ سمت چپ عضوی از مجموعهٔ سمت راست است و باید علامت $\subseteq$ قرار گیرد.

**پ)** $\{۲ ، ۱ ، c ، a\} \subseteq \{b ، ۲ ، a ، ۱\}$: نادرست است، زیرا b در مجموعهٔ سمت چپ است که در مجموعهٔ سمت راست نیست.

**ت)** $\{۱۵ ، ... ، ۲ ، ۱\} \subseteq \{۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱\}$: درست است، زیرا هر عضو مجموعهٔ سمت چپ عضوی از مجموعهٔ سمت راست است.

---

**مثال۲** با توجه به مجموعه‌های A ، B و C درستی یا نادرستی عبارت‌ها را مشخص کنید.

$A = \{-۴ ، -۳ ، -۲ ، ... ، ۳ ، ۴\}$ و $B = \{۲ ، ۳ ، ۴\}$ و $C = \{۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$

الف) $B \subseteq A \rightarrow$ درست ب) $C \subseteq A \rightarrow$ نادرست پ) $B \nsubseteq C \rightarrow$ نادرست ت) $\varnothing \subseteq C \rightarrow$ درست ث) $B \subseteq B \rightarrow$ درست

---

**مثال۳** همهٔ زیرمجموعه‌های $B = \{۱۰ ، ۱۱ ، ۱۲\}$ را بنویسید.

**پاسخ:** برای نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه ابتدا زیرمجموعه‌های تک عضوی، سپس دو عضوی و ... را می‌نویسیم. سپس با توجه به نکته‌های قبل $\varnothing$ و خود مجموعه را نیز به‌عنوان زیرمجموعه می‌نویسیم.

بنابراین زیرمجموعه‌های B عبارتند از: $\{۱۲ ، ۱۱ ، ۱۰\}$ ، $\{۱۲ ، ۱۱\}$ ، $\{۱۲ ، ۱۰\}$ ، $\{۱۱ ، ۱۰\}$ ، $\{۱۲\}$ ، $\{۱۱\}$ ، $\{۱۰\}$ ، $\varnothing$

مجموعهٔ B ، ۸ زیر مجموعه دارد.

---

**مثال۴** اگر مجموعه‌های $A = \{۱- ، ۰\}$ و $B = \{۷ ، ۱- ، ۰\}$ و $C = \{۰ ، ۷ ، ۱- ، ۱۴\}$ باشند.

**الف)** آیا $A \subseteq B$ است؟ چرا؟ **ب)** آیا $B \subseteq C$ است؟ چرا؟

**پ)** آیا با توجه به قسمت الف و ب می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq C$ است؟ چرا؟

**پاسخ:** الف) بله، زیرا هر عضو A در B است. ب) بله، زیرا هر عضو B در C است.

پ) بله، زیرا هر عضو A در B است. و هر عضو B در C است. پس می‌توان نتیجه گرفت که هر عضو A در C قرار دارد.

---

**اگر A ، B و C سه مجموعه باشند و داشته باشیم** $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{cases}$ **آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq C$ است.**

## تعداد زیر مجموعه‌ها

تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه از رابطهٔ $۲^n$ به‌دست می‌آید که n تعداد اعضای مجموعه است.

**مثال۱** مجموعهٔ $A = \{e ، f ، c ، d\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

$n = ۴ \Rightarrow ۲^۴ = ۱۶$

**پاسخ:** مجموعهٔ A ، ۱۶ زیرمجموعه دارد که عبارتند از:

$\varnothing ، \{e\} ، \{f\} ، \{c\} ، \{d\} ، \{e ، f\} ، \{e ، c\} ، \{e ، d\} ، \{f ، c\} ، \{f ، d\}$

$\{c ، d\} ، \{e ، f ، c\} ، \{e ، f ، d\} ، \{f ، c ، d\} ، \{e ، c ، d\} ، \{e ، f ، c ، d\}$

**مثال ۲** مجموعهٔ G دارای ۳۲ زیرمجموعه است. این مجموعه چند عضو دارد؟

**پاسخ:** مجموعهٔ G دارای ۵ عضو است

$۲^n = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow n = ۵$

**همهٔ زیرمجموعه‌های یك مجموعه به‌جز خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض (سره) آن مجموعه می‌گویند. به‌عبارت‌دیگر، تعداد زیرمجموعه‌های محض (سره) یك مجموعهٔ n عضوی برابر است با: $۲^n - ۱$**

**مثال** تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ شش عضوی را به‌دست آورید.

**پاسخ:** این مجموعه ۶۳ زیر مجموعهٔ محض (سره) دارد

$n = ۶ \Rightarrow ۲^۶ = ۶۴ \Rightarrow ۶۴ - ۱ = ۶۳$

## نمایش مجموعه

هر مجموعه را می‌توان به چهار شیوه نوشت

**۱- به زبان فارسی** **۲- با اعضا** **۳- با نمودار ون** **۴- به زبان ریاضی (با نمادهای ریاضی)**

**۱- به زبان فارسی:** ویژگی مشترک اعضای یک مجموعه با عبارت‌های فارسی بیان می‌شود.

**مثال** مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷

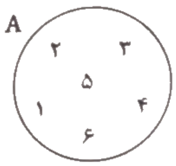
**۲- با اعضا:** نمایش تک تک اعضا که بین دو آکولاد قرار گرفته‌اند.

**مثال**

$A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$

**۳- با نمودار ون:** اعضای یک مجموعه در داخل یک خط بسته قرار می‌گیرد.

**مثال**




**۴- به زبان ریاضی (با نمادهای ریاضی):** برای نشان دادن یک مجموعه با نمادهای ریاضی باید یک متغیر را به‌عنوان نمایندهٔ اعضای مجموعه مشخص کنیم و ویژگی مشترکی که بین همهٔ اعضای مجموعه قرار دارد را به زبان ریاضی به آن متغیر نسبت دهیم.

**مثال** مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷ را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) ابتدا یک حرف کوچک انگلیسی مانند x یا هر حرف کوچک دیگر را به عنوان نمایندهٔ تمام اعضا در داخل مجموعه می‌نویسیم: $\{x \quad \}$

ب) مجموعهٔ بزرگی که اعضای مورد نظر زیرمجموعه‌ای از آن می‌باشد را معرفی می‌کنیم: $\{x \in N \quad \}$

پ) علامت « | » را قرار می‌دهیم $\{x \in N \mid \quad \}$

ت) با استفاده از علامت‌های ($<$ و $>$) یا ($\geq$ و $\leq$) یا نمادهای دیگر ریاضی محدودهٔ اعداد مورد نظر در آن مجموعهٔ بزرگ را مشخص می‌نماییم.

$\{x \in N \mid x \leq ۶\}$ یا $\{x \in N \mid x < ۷\}$

**نوشتن مجموعه به زبان ریاضی برای مجموعه‌هایی که تعداد اعضای مجموعه زیاد باشد، مفید است.**

**مثال** **برای نوشتن مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۵ با نمادهای ریاضی، 5k را به‌عنوان نمایندهٔ اعضا در نظر می‌گیریم که در آن $k \in N$ است و می‌نویسیم $\{5k \mid k \in N\}$ که خوانده می‌شود مجموعهٔ اعدادی که به شکل 5k هستند، به‌طوری‌که k متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی است.**

**در نوشتن یك مجموعه به زبان ریاضی علامت « | » خوانده می‌شود «به‌طوری‌که» یا «به‌شرطی‌که» یا «به‌قسمی‌که»**

در زیر چند مجموعه را به زبان فارسی یا با نوشتن اعضا و یا به زبان ریاضی نشان می‌دهیم

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج = $\{۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ...\} = \{۲k \mid k \in N\}$

ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد = $\{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ , ...\} = \{۲k - ۱ \mid k \in N\}$

پ) مجموعهٔ اعداد صحیح یک رقمی = {۹ و ۸ و ... و ۷- و ۸- و ۹-} = $\{x \in Z \mid -۹ \le x \le ۹\}$

ت) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰ = {۲۰ و ۱۰ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱} = $\left\{x \in N \mid \frac{۲۰}{x} \in N\right\}$

ث) مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۱۱ و ۱۷ = {۱۶ و ۱۵ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲} = $\{x \in N \mid ۱۱ < x < ۱۷\}$ یا $\{x \in N \mid ۱۲ \le x \le ۱۶\}$

**مثال** **مجموعهٔ $A = \{۲k - ۳ \mid k \in N\}$ را با اعضا مشخص کنید. برای نوشتن اعضای مجموعهٔ A از جدول زیر استفاده می‌کنیم.**

| k | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲k − ۳ | (۲×۱) − ۳ = −۱ | (۲×۲) − ۳ = ۱ | (۲×۳) − ۳ = ۳ | (۲×۴) − ۳ = ۵ | (۲×۵) − ۳ = ۷ | ... |

پس می‌نویسیم: $A = \{$... و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ و ۱-$\}$

---

مجموعه‌های بزرگ اعداد را می‌توان به‌صورت زیر به زبان فارسی یا با نوشتن اعضا و یا به زبان ریاضی نوشت:

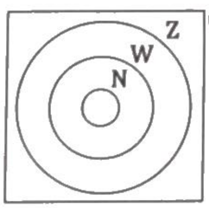
N = مجموعهٔ اعداد طبیعی = {... و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} و W = مجموعهٔ اعداد حسابی = {... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰} = $\{k - ۱ \mid k \in N\}$

Z = مجموعهٔ اعداد صحیح = {... و ۳- و ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ...} و Q = مجموعهٔ اعداد گویا = $\left\{\frac{a}{b} \mid a \text{ و } b \in Z \text{ و } b \neq ۰\right\}$

**مجموعهٔ اعداد گویا را نمی‌توان با اعضا نشان داد زیرا اولین عدد بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست.**

**مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج را با E و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد را با O نشان می‌دهیم.**

**وضعیت مجموعه‌های N ، W ، Z و Q را نسبت به هم می‌توان به‌کمك نمودار وِن مقابل نشان داد.**

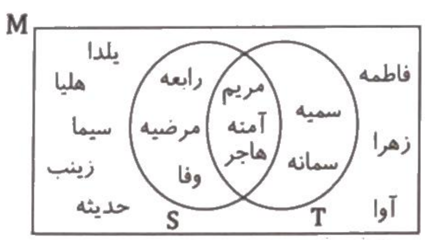



**مطابق نمودار مقابل:** هر عضو مجموعهٔ اعداد طبیعی عضوی از مجموعه‌های W ، Z و Q است. هر عضو مجموعهٔ اعداد حسابی عضوی از مجموعه‌های Z و Q است و هر عضو مجموعهٔ اعداد صحیح عضوی از مجموعهٔ Q است. زیرا هر عدد صحیح a را می‌توان به‌صورت $\frac{a}{۱}$ نوشت. به زبان ریاضی می‌توان نوشت: $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

## اجتماع، اشتراک و تفاضلِ مجموعه‌ها

### اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها

مربی پرورشی از بین دانش‌آموزان کلاس نهم (ب) (که در بخش‌های قبلی معرفی شدند) گروهی را برای اجرای سرود مدرسه انتخاب کرد که اسامی آن‌ها عبارت‌اند از { وفا و مرضیه و رابعه و هاجر و آمنه و مریم } = S. گروه تئاتر را با T، گروه سرود را با S و کلاس نهم (ب) را با M نام‌گذاری می‌کنیم و این گروه‌بندی را با نمودار وِن مقابل نشان می‌دهیم.




در نمودار مقابل، مریم، آمنه و هاجر عضو هردو گروه هستند. سمیه و سمانه فقط عضو گروه تئاتر و رابعه، مرضیه و وفا فقط عضو گروه سرود هستند.

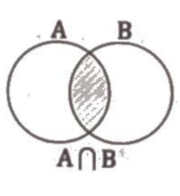
مجموعه‌های زیر را با اعضایشان به‌صورت زیر می‌توان تشکیل داد.

{ هاجر و آمنه و مریم } = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که در هر دو گروه عضو هستند

{ وفا و مرضیه و رابعه و سمیه و سمانه و هاجر و آمنه و مریم } = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که حداقل در یکی از این دو گروه عضو هستند

**تعریف:** اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای که اعضای آن هم عضو A و هم عضو B باشند را اشتراک دو مجموعهٔ A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم که خوانده می‌شود A اشتراک B.

اشتراک دو مجموعهٔ A و B به زبان ریاضی عبارت است از: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$ در نمودار مقابل قسمت هاشورخورده، اشتراک دو مجموعهٔ A و B را نشان می‌دهد.

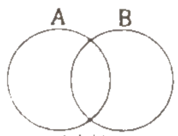


**تعریف:** اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای که اعضای آن شامل همهٔ اعضای دو مجموعهٔ A و B است را اجتماع دو مجموعهٔ A و B می‌نامیم و با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم که خوانده می‌شود A اجتماع B.

**تعریف دیگر:** اجتماع دو مجموعهٔ A و B شامل عضوهایی است که یا در A باشند یا در B.

**تعریف دیگر:** اجتماع دو مجموعهٔ A و B شامل عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A یا B باشند.

اجتماع دو مجموعهٔ A و B به زبان ریاضی عبارت است از: $A\cup B=\{x \mid x\in A$ یا $x\in B\}$ در نمودار مقابل قسمت هاشورخورده، اجتماع دو مجموعهٔ A و B را نشان می‌دهد.



$A\cup B$

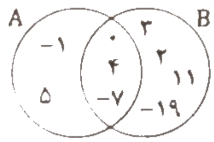
در مثال صفحهٔ قبل:

{هاجر و آمنه و مریم} = $T\cap S$ = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که در هر دو گروه عضو هستند

{وفا و مرضیه و رابعه و سمیه و سمانه و هاجر و آمنه و مریم} = $T\cup S$ = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که حداقل در یکی از این دو گروه عضو هستند

**مثال۱** **با توجه به نمودار مقابل مجموعه‌های A ، B و سپس $A\cap B$ و $A\cup B$ را با اعضایشان تشکیل دهید.**

**پاسخ:**




$A=\{۰ و -۱ و ۵ و ۴ و -۷\}$

$B=\{۰ و ۲ و ۳ و ۴ و -۷ و ۱۱ و -۱۹\}$

$A\cap B=\{۰ و ۴ و -۷\}$

$A\cup B=\{۰ و -۱ و ۵ و ۴ و ۲ و ۳ و -۷ و -۱۹ و ۱۱\}$

---

**مثال۲** اگر $C=\{a و e و i و o و u\}$ و $D=\{a و b و c و d و e و f\}$ باشند، **مجموعهٔ $C\cup D$ و $C\cap D$ را با اعضایشان تشکیل دهید.**

**پاسخ:** $C\cup D=\{a و b و c و d و e و f و i و o و u\}$ و $C\cap D=\{a و e\}$

---

**مثال۳** اگر $A=\{x\in N \mid x\le ۵\}$ و $B=\{۲k \mid k\in Z و -۴<k<۴\}$ باشند:

**الف) مجموعه‌های A ، B ، $A\cap B$ و $A\cup B$ را با اعضایشان تشکیل دهید.** $A=\{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵\}$ و $B=\{-۶ و -۴ و -۲ و ۰ و ۲ و ۴ و ۶\}$

$A\cap B=\{۲ و ۴\}$ = مجموعهٔ اعدادی که در هر دو مجموعه هستند

$A\cup B=\{-۶ و -۴ و -۲ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶\}$ = مجموعهٔ اعدادی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هستند

**ب) مجموعه‌های $A\cap B$ و $A\cup B$ را به زبان ریاضی بنویسید.**

$A\cup B=\{x\in Z \mid -۶\le x\le ۶\ ,\ x\ne -۱ و -۳ و -۵\}$ و $A\cap B=\{۲k \mid k\in N\ ,\ k<۳\}$

---

## تفاضل مجموعه‌ها

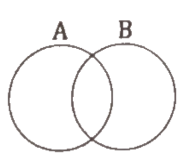
با توجه به مثال دانش‌آموزان کلاس نهم (ب) می‌توانیم مجموعه‌های زیر را با اعضا تشکیل دهیم:

{سمانه و سمیه} = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه تئاتر هستند

{وفا و مرضیه و رابعه} = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرود هستند

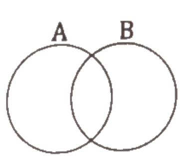
**تعریف:** اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای که اعضای آن عضو A بوده ولی عضو B نباشند را تفاضل B از A می‌نامیم و با نماد $A-B$ نشان می‌دهیم که خوانده می‌شود A منهای B.

مجموعهٔ $A-B$ به زبان ریاضی عبارت است از: $A-B=\{x \mid x\in A$ و $x\notin B\}$ در نمودار مقابل قسمت هاشورخورده، مجموعهٔ $A-B$ را نشان می‌دهد.



$A-B$

مجموعهٔ $B-A$ مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو B بوده، ولی عضو A نباشند. $B-A=\{x \mid x\in B$ و $x\notin A\}$



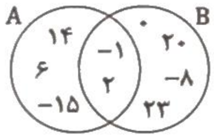
$B-A$

با توجه به تعریف تفاضلِ دو مجموعه، برای مثال صفحهٔ قبل می‌توان نوشت:

T − S = { سمانه و سمیه } = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه تئاتر هستند.

S − T = { وفا و مرضیه و رابعه } = مجموعهٔ دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرود هستند.

**مثال۱** **با توجه به نمودار مقابل مجموعه‌های A − B و B − A را با اعضایشان تشکیل دهید.**




پاسخ:

A − B = {۶ و ۱۴ و ۱۵−}

B − A = {۸− و ۲۳ و ۲۰ و ۰}

---

**مثال۲** **اگر E = {a و b و x و y و m و n} و F = {a و b و c و d و e و f} باشند، مجموعهٔ F − E و E − F را با اعضایشان تشکیل دهید.**

پاسخ: F − E = {c و d و e و f} و E − F = {x و y و m و n}

---

**مثال۳** **اگر A = {۲^x − ۱ | x ∈ W و x < ۴} و B = {۲x + ۱ | x ∈ Z و −۲ < x < ۳} باشد، مجموعه‌های زیر را با اعضایشان تشکیل دهید.**

الف) A = {۰ و ۱ و ۳ و ۷}

ب) B = {۱− و ۱ و ۳ و ۵}

پ) A − B = {۰ و ۷} = مجموعهٔ اعدادی که فقط در A هستند

ت) B − A = {۱− و ۵} = مجموعهٔ اعدادی که فقط در B هستند

---

**مثال۴** **با توجه به مجموعه‌های A = {۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱} ، B = {۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۱۰ و ۱۱} و C = {۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳}، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضایش مشخص کنید.**

الف) A − B = {۵}

ب) B − C = {۲ و ۳ و ۶ و ۷}

پ) C ∩ ∅ = ∅

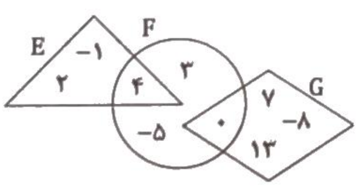
ت) A ∪ A = {۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱}

ث) B ∩ B = {۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۱۰ و ۱۱} و (B ∩ B) − A = {۶ و ۱۰}

ج) B ∪ C = {۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳} و (B ∪ C) − A = {۶ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۳}

---

**مثال۵** **با توجه به نمودار مقابل، گزینه‌های درست و نادرست را مشخص کنید.**




پاسخ:

الف) E − F = {۱− و ۲} درست

ب) (E ∩ F) ∩ G = ∅ درست

پ) F − G = G − F نادرست

ت) (E − G) ∩ F = {۵− و ۴} نادرست

ث) (E − F) ∪ (F − E) = {۱− و ۲ و ۳ و ۵−} نادرست

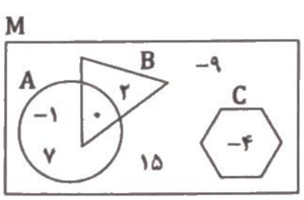
---

## مجموعه مرجع

**تعریف:** در مبحث مجموعه‌ها، مجموعه‌ای که شامل مجموعه‌های دیگر باشد، مجموعهٔ مرجع نامیده می‌شود که آن را معمولاً با M نشان می‌دهند.

در مثال دانش‌آموزان کلاس نهم (ب) مجموعهٔ M که شامل مجموعه‌های T و S می‌باشد را مجموعهٔ مرجع گویند.

**مثال** باتوجه به نمودار مقابل مجموعهٔ مرجع را با اعضا مشخص کنید.



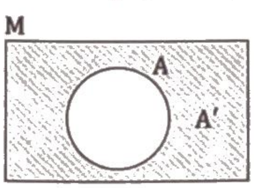

M = {۱− و ۷ و ۰ و ۲ و ۱۵ و ۴− و ۹−} مجموعهٔ مرجع

---

## متمم یک مجموعه

**تعریف:** اگر A یک مجموعه و M مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ A مجموعه‌ای است که عضوهای آن در M باشد، ولی در A نباشد و آن را با $A'$ نشان می‌دهیم که خوانده می‌شود، «آپریم». متمم مجموعهٔ A یا $A'$ به زبان ریاضی عبارت است از : $A' = \{x \mid x \in M$ و $x \notin A\}$

درنمودار مقابل قسمت هاشور خورده، $A'$ یا متمم A را نشان می‌دهد.



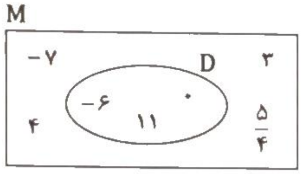

$A' = M - A$

در مثال دانش‌آموزان کلاس نهم (ب):

متمم مجموعهٔ S = $S'$ = {آوا، زهرا، فاطمه، سمانه، سمیه، حدیثه، زینب، سیما، هلیا، یلدا}

متمم مجموعهٔ T = $T'$ = {آوا، زهرا، فاطمه، وفا، مرضیه، رابعه، حدیثه، زینب، سیما، هلیا، یلدا}

**مثال۱** باتوجه به نمودار مقابل مجموعهٔ $D'$ را با اعضایش تشکیل دهید.




**پاسخ:** $D'$ = {−۷ و ۴ و $\frac{۵}{۴}$ و ۳}

---

**مثال۲** اگر M = {c و d و e و f و m و n} مجموعهٔ مرجع و A = {c و e و m} باشد، مجموعهٔ $A'$ را با اعضایش تشکیل دهید.

**پاسخ:** $A'$ = {d و f و n}

---

**مثال۳** اگر M = {x ∈ Z | x < −۵} مجموعهٔ مرجع و B = {x ∈ Z | x < −۱۰} باشد.مجموعه‌های M ، B و $B'$ را با اعضایشان تشکیل دهید.

**پاسخ:**

الف) M = {... و −۱۲ و −۱۱ و −۱۰ و −۹ و −۸ و −۱۲ و ...}

ب) B = {... و −۱۳ و −۱۲ و −۱۱}

پ) $B'$ = {−۱۰ و −۹ و −۸ و −۷ و −۶}

---

**هر عضو مجموعهٔ M یا متعلق است به A یا متعلق است به $A'$.**

**اگر عضوی در A باشد در $A'$ نیست و بالعکس.**

**نکات دیگر:**

۱- اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، داریم: $n(A) = k$، یعنی تعداد اعضای مجموعهٔ A برابر است با k.

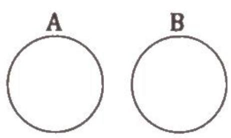
**مثال** **اگر A = {a و b و c} باشد، مقدار n(A) چه‌قدر است؟**

**پاسخ:** چون مجموعهٔ A سه عضو دارد، پس: $n(A) = ۳$

---

۲- اگر $A \cap B = \varnothing$ (یعنی اشتراک دو مجموعه تهی باشد)، دو مجموعهٔ A و B را دو مجموعهٔ جدا از هم می‌گویند.

**مثال** **دو مجموعهٔ A = {۲ و ۴ و ۶ و ...} و B = {۱ و ۳ و ۵ و ...} دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.**




---

۳- $A \cap A = A$، اشتراک هر مجموعه با خودش برابر با همان مجموعه است.

۴- $A \cup A = A$، اجتماع هر مجموعه با خودش برابر با همان مجموعه است.

۵- $A \cap \varnothing = \varnothing$، اشتراک هر مجموعه با مجموعهٔ تهی برابر با مجموعهٔ تهی است.

۶- $A \cup \varnothing = A$، اجتماع هر مجموعه با مجموعهٔ تهی برابر با خود آن مجموعه است.

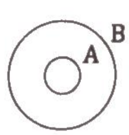
۷- $A \cap B = B \cap A$، اشتراک دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی دارد.

۸- $A \cup B = B \cup A$، اجتماع دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی دارد.

۹- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$، اشتراک سه مجموعه خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

۱۰- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$، اجتماع سه مجموعه خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

۱۱- اگر $A \subseteq B \Leftarrow A \cap B = A$، اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، اشتراک A و B برابر است با مجموعهٔ A (مجموعهٔ کوچک‌تر)

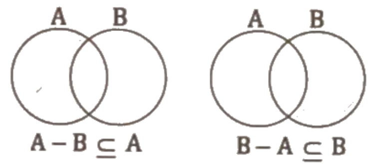



۱۲- اگر $A \subseteq B \Leftarrow A \cup B = B$، اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، اجتماع A و B برابر است با مجموعهٔ B (مجموعهٔ بزرگ‌تر)

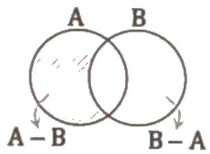
۱۳- $A \supseteq (B \cap A)$ و $B \supseteq (B \cap A)$، اشتراک دو مجموعهٔ $A$ و $B$ زیر مجموعهٔ هریک از دو مجموعهٔ $A$ و $B$ است.

۱۴- $(A \cup B) \supseteq B$ و $(A \cup B) \supseteq A$، هرکدام از مجموعه‌های $A$ و $B$ زیر مجموعهٔ اجتماع $A$ و $B$ هستند.

۱۵- $A - B \subseteq A$ و $B - A \subseteq B$

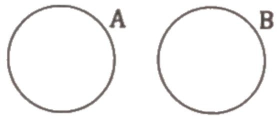



۱۶- $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$، اشتراک مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ مجموعهٔ تهی است.




۱۷- $A - B \neq B - A$، تفاضل دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۱۸- اگر $A$ و $B$ دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه: $B - A = B$ و $A - B = A$




۱۹- اگر $A \subseteq B \Leftarrow A - B = \varnothing$


۲۰- اگر $B \subseteq A \Leftarrow B - A = \varnothing$


۲۱- $A \cap B \subseteq A \cup B$، اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعهٔ اجتماع همان دو مجموعه است.

۲۲- $(B - A) \cup (A \cap B) = B$، اجتماع دو مجموعهٔ $(B - A)$ و $(A \cap B)$ برابر با مجموعهٔ $B$ است.

۲۳- $(A - B) \cup (A \cap B) = A$، اجتماع دو مجموعهٔ $(A - B)$ و $(A \cap B)$ برابر با مجموعهٔ $A$ است.

۲۴- $A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = B = \varnothing$، اگر اجتماع دو مجموعه برابر با مجموعهٔ تهی باشد، هر دو مجموعه تهی هستند.

۲۵- $A - A = \varnothing$ و $A - \varnothing = A$ و $\varnothing - A = \varnothing$

۲۶- برای مجموعه‌های $N$ (اعدادطبیعی)، $W$ (اعداد حسابی)، $Z$ (اعداد صحیح) و $Q$ (اعداد گویا) می‌توان خاصیت‌های زیر را نوشت:

| | | |
|---|---|---|
| $W - Z = \varnothing$ | $N - W = \varnothing$ | $W - N = \{0\}$ |
| $Z - W = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ | $N - Z = \varnothing$ | $Z - N = \{0, -1, -2, \ldots\}$ |
| $W \cup Z = Z$ | $N \cup Z = Z$ | $W \cup N = W$ |
| $W \cap Z = W$ | $N \cap Z = N$ | $W \cap N = N$ |
| $Q \cup W = Q$ | $Q \cup Z = Q$ | $Q \cup N = Q$ |
| $Q \cap W = W$ | $Q \cap Z = Z$ | $Q \cap N = N$ |

۲۷- $A \cup (A \cap B) = A$، اجتماع مجموعهٔ $A$ با $(A \cap B)$ برابر با مجموعهٔ $A$ است.

۲۸- $A \cap (A \cup B) = A$، اشتراک مجموعهٔ $A$ با $(A \cup B)$ برابر با مجموعهٔ $A$ است.

۲۹- اگر $A = B \Rightarrow A' = B'$، اگر دو مجموعه مساوی باشند، متمم‌های آن‌ها نیز مساوی‌اند.

۳۰- $M' = \varnothing$، متمم مجموعهٔ مرجع مجموعهٔ تهی است و $\varnothing' = M$ متمم مجموعهٔ تهی مجموعهٔ مرجع است.

۳۱- $A \cup M = M$

۳۲- $A \cup A' = M$، اجتماع هر مجموعه با متمم آن برابر است با مجموعهٔ مرجع.

۳۳- $A \cap M = A$

۳۴- $A \cap A' = \varnothing$، اشتراک هر مجموعه با متمم‌اش برابر است با مجموعهٔ تهی.

۳۵- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$

## مجموعه‌ها و احتمال

در سال‌های گذشته مفهوم احتمال و پیشامد و محاسبهٔ احتمال رخداد یک پیشامد را آموختید.

در بخش‌های قبل نیز با مجموعه‌ها و خواص آن‌ها آشنا شدید. در این بخش به ارتباط بین احتمال و مجموعه‌ها می‌پردازیم. نکتهٔ قابل توجه این است که مسایل مربوط به احتمال را به کمک مجموعه‌ها، بسیار ساده‌تر می‌توان حل نمود و حتی حل برخی مسایل احتمال تنها به کمک مجموعه‌ها امکان‌پذیر است.

### یادآوری تعاریف مربوط به محاسبه احتمال

**تعریف آزمایش:** هر عملی که منجر به یک نتیجه شود را آزمایش گویند، مانند: پرتاب‌کردن یک تاس.

هر آزمایش بر اساس نتیجه‌اش به دو دسته تقسیم می‌شود:

**۱ – آزمایش قطعی:** آزمایشی که می‌توان نتیجه را قبل از انجام آن مشخص کرد.

**مثال** **اگر به طور تصادفی یک مهره از داخل یک جعبه که درون آن مهره‌هایی با رنگ آبی قرار دارد، خارج کنیم، همواره نتیجه، مهرهٔ آبی خواهد بود.**

---

**۲ – آزمایش تصادفی:** آزمایشی که نتیجهٔ آن از قبل مشخص نباشد.

**مثال** **در پرتاب یک تاس نمی‌توان پیش‌بینی کرد که چه عددی رو می‌آید.**

---

**فضای نمونه‌ای:** در هر آزمایش تصادفی مجموعهٔ تمام حالت‌های ممکن را فضای نمونهٔ آن آزمایش گویند که آن را با مجموعهٔ $S$ و تعداد اعضای $S$ را با $n(S)$ نشان می‌دهند.

**مثال** **فضای نمونه‌ای (تمام حالت‌های ممکن) هر یک از آزمایش‌های زیر را بنویسید.**

**الف) پرتاب یک سکه:** $S=\{\text{پشت و رو}\} \Rightarrow n(S)=۲$

**ب) پرتاب یک سکه دو مرتبه پشت سر هم:** $S=\{\text{(رو و رو) و (پشت و رو) و (رو و پشت) و (پشت و پشت)}\} \Rightarrow n(S)=۴$

**پ) پرتاب یک تاس:** $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(S)=۶$

**ت) پرتاب دو تاس آبی و قرمز با هم:** S = { (۱،۱) و (۱،۲) و (۱،۳) و ... و (۱،۶) و (۲،۶) و ... و (۳،۱) و (۳،۶) و ... و (۴،۱)
و ... و (۴،۶) و (۵،۱) و ... و (۵،۶) و (۶،۱) و ... و (۶،۶) } $\Rightarrow n(S)=۳۶$

**ث) پرتاب یک سکه و یک تاس: (رو = ر ، پشت = پ)**

S = { (۱،ر) و (۲،ر) و (۳،ر) و (۴،ر) و (۵،ر) و (۶،ر) و (۱،پ) و (۲،پ) و (۳،پ) و (۴،پ) و (۵،پ) و (۶،پ) } $\Rightarrow n(S)=۱۲$

---

**پیشامد:** در هر آزمایش مجموعهٔ تمام حالت‌های مطلوب و دلخواه که می‌خواهیم اتفاق بیفتد را پیشامد می‌گوییم. که آن را با $A$، $B$ و ... نمایش می‌دهند و $n(A)$ تعداد اعضای مجموعهٔ $A$ است. با توجه به مطالب فوق، دستور محاسبهٔ احتمال رخداد یک پیشامد را به کمک مجموعه‌ها می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$\text{احتمال رخداد یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}} \quad \text{یا} \quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A)$ احتمال رخداد پیشامد $A$ است. $S$ مجموعهٔ تمام حالت‌های ممکن و $A$ مجموعهٔ همهٔ حالت‌های مطلوب است.

**مثال ۱** **از درون یک جعبه که داخل آن ۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ قرار دارد، یک کارت به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. چه‌قدر احتمال دارد که: الف) عدد کارت بیرون آمده اول باشد. ب) عدد کارت بیرون آمده مرکب باشد.**

**پاسخ:** الف) مجموعهٔ پیشامد مطلوب یعنی اول بودن عدد را $A$ و مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را $S$ می‌نامیم، در این‌صورت داریم:

$$A=\{۲,۳,۵,۷\} \quad \text{و} \quad S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\} \Rightarrow n(A)=۴ \quad \text{و} \quad n(S)=۱۰ \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

ب) مجموعهٔ پیشامد مطلوب یعنی مرکب بودن عدد را B می‌گیریم، در این‌صورت داریم:

$$B=\{۴,۶,۸,۹,۱۰\} \quad \text{و} \quad S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\} \Rightarrow n(B)=۵ \quad \text{و} \quad n(S)=۱۰ \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

---

**مثال۲** **اسامی دانش‌آموزان کلاس نهم (ج) به‌صورت زیر است:**

**ابوذر، محمد پارسا، علی، عرفان، حسین، محمدعلی، نیما، امیر، رضا، امیرحسین، سعید، آریا، پوریا، صدرا، آریاز، عبدالله، مرتضی، جواد، هاشم، کیان، آرین، سینا، سبحان، حسن، شایان، پرهام. معلم کلاس می‌خواهد یک نفر را به‌طور تصادفی از بین آن‌ها انتخاب کند، چه‌قدر احتمال دارد که:**

**الف) اسم دانش‌آموز انتخاب شده دارای حرف «ر» باشد.** **ب) اسم دانش‌آموز انتخاب شده دارای حرف «ح» باشد.**

**پاسخ:** الف) مجموعهٔ پیشامد مطلوب یعنی اسم دارای حرف «ر» را A و مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S می‌نامیم.

A = { آرین و پرهام و ابوذر و محمد پارسا و عرفان و امیر و رضا و آریا و امیرحسین و پوریا و صدرا و آریاز و مرتضی } $\Rightarrow n(A)=۱۳$

S = { اسامی همهٔ دانش‌آموزان کلاس نهم (ج) } $\Rightarrow n(S)=۲۶$ $\qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۳}{۲۶}=\frac{۱}{۲}$

ب) مجموعهٔ پیشامد مطلوب یعنی اسم دارای حرف «ح» را B و مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S می‌نامیم.

B = { محمد پارسا و حسین و محمدعلی و امیرحسین و سبحان و حسن } $\Rightarrow n(B)=۶$

S = { اسامی همهٔ دانش‌آموزان کلاس نهم (ج) } $\Rightarrow n(S)=۲۶$ $\qquad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۶}=\frac{۳}{۱۳}$

---

**مثال۳** **اگر یک تاس و یک سکه را هم‌زمان بیندازیم چه‌قدر احتمال دارد که:**

**الف) سکه، رو بیاید و تاس عدد زوج باشد.** **ب) عدد تاس بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد.**

**پاسخ:** در این آزمایش مجموعهٔ تمام حالت‌های ممکن به‌صورت زیر است: (رو = ر ، پشت = پ)

S = { (۱و ر) و (۲و ر) و (۳و ر) و (۴و ر) و (۵و ر) و (۶و ر) و (۱و پ) و (۲و پ) و (۳و پ) و (۴و پ) و (۵و پ) و (۶و پ) } $\Rightarrow n(S)=۱۲$

الف) مجموعهٔ پیشامد مطلوب یعنی سکه رو و تاس عدد زوج باشد را A می‌نامیم.

A = { (۲و ر) و (۴و ر) و (۶و ر) } $\Rightarrow n(A)=۳$ $\qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

ب) مجموعهٔ پیشامد مطلوب یعنی عدد تاس بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد را B می‌نامیم.

B = { (۶و ر) و (۶و پ) } $\Rightarrow n(B)=۲$ $\qquad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$

---

**مثال۴** **اگر از درون یک کیسه که دارای ۳ مهره با شماره‌های ۱ ، ۲ و ۳ است، یک مهره به طور تصادفی بیرون آوریم:**

**الف) مجموعه‌ای که شامل همهٔ حالت‌های ممکن است را بنویسید.**

**ب) مجموعهٔ S چند زیر مجموعه دارد؟ آن‌ها را بنویسید.**

**پ) اگر هر یک از زیر مجموعه‌های S را یک پیشامد تصادفی در نظر بگیریم احتمال رخداد هر پیشامد را حساب کنید.**

**پاسخ:**

الف) $S=\{۱,۲,۳\} \Rightarrow n(S)=۳$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های S: $۲^۳=۸ \Rightarrow \varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱,۲\}, \{۱,۳\}, \{۲,۳\}, \{۱,۲,۳\}$

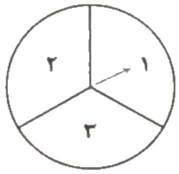
پ) $A=\varnothing \Rightarrow n(A)=۰ \Rightarrow P(A)=\frac{۰}{۳}=۰$ $\qquad A=\{۱\}$ یا $\{۲\}$ یا $\{۳\}$ $\Rightarrow n(A)=۱ \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳}$

$A=\{۱,۲\}$ یا $\{۱,۳\}$ یا $\{۲,۳\}$ $\Rightarrow n(A)=۲ \Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}$ $\qquad A=\{۱,۲,۳\} \Rightarrow n(A)=۳ \Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۳}=۱$

---

**اگر در یک آزمایش تصادفی مجموعهٔ S (مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن) را در نظر گرفته و تمام زیر مجموعه‌های S را بنویسیم، هر یک از زیر مجموعه‌های S یک پیشامد تصادفی نامیده می‌شود که می‌توان احتمال رخداد هر پیشامد را محاسبه کرد.**

**مثال۱** چرخندهٔ مقابل را در نظر بگیرید و به سوال‌های زیر پاسخ دهید.




**الف) همهٔ حالت‌های ممکن (مجموعهٔ S) که عقربه می‌تواند روی یک عدد بایستد را بنویسید.**

**ب) برای مجموعهٔ S چند پیشامد تصادفی می‌توان نوشت؟**

**پ) برای هر زیر مجموعهٔ S یک پیشامد تعریف کنید.**

**پاسخ:**

الف) $S=\{۱,۲,۳\} \Rightarrow n(S)=۳$

ب) چون تعداد زیر مجموعه‌های S برابر با تعداد پیشامدهای تصادفی برای S است پس: تعداد زیر مجموعه‌های S $= ۲^۳ = ۸$

یعنی برای مجموعهٔ S، ۸ پیشامد تصادفی می‌توان نوشت.

پ) $\varnothing$: عقربه روی هیچ عددی قرار نگیرد.

$\{۱\}$: عقربه روی عددی که نه اول است و نه مرکب قرار گیرد.

$\{۲\}$: عقربه روی عدد زوج بایستد.

$\{۳\}$: عقربه روی مضرب ۳ بایستد.

$\{۱,۲\}$: عقربه روی عدد ۳ نایستد.

$\{۱,۳\}$: عقربه روی عدد فرد بایستد.

$\{۲,۳\}$: عقربه روی عددی اول بایستد.

$\{۱,۲,۳\}$: عقربه روی عددی کم‌تر از ۴ بایستد.

---

**مثال۲** **برای هر یک از آزمایش‌های زیر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را نوشته و بگویید چند پیشامد تصادفی می‌توان برای آن مجموعه نوشت؟**

**الف) خانواده‌ای دارای دو فرزند باشد. (دختر = د، پسر = پ)**

**ب) خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد.**

**پ) انتخاب یک عدد تصادفی از اعداد ۱۱ تا ۱۹.**

**پاسخ:**

الف) $S=\{$(د و د) و (پ و د) و (ب و پ) و (د و پ)$\} \Rightarrow n(S)=۴$

تعداد زیر مجموعه‌های S = تعداد پیشامدهای تصادفی S $= ۲^۴ = ۱۶$

ب) $S=\{$(د و د و د) و (پ و د و د) و (پ و پ و د) و (د و پ و د) و (د و د و پ) و (پ و پ و پ) و (ب و د و پ) و (د و پ و پ)$\} \Rightarrow n(S)=۸$

تعداد زیر مجموعه‌های S = تعداد پیشامدهای تصادفی S $= ۲^۸ = ۲۵۶$

پ) $S=\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹\} \Rightarrow n(S)=۹$

تعداد پیشامدهای تصادفی S $= ۲^۹ = ۵۱۲$

---

چون S مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن و A مجموعهٔ همهٔ حالت‌های مطلوب هستند، لذا از خواص مجموعه‌ها در محاسبات پیروی می‌کنند.

- **اگر احتمال A یا B را بخواهیم یعنی $A\cup B$**
- **اگر احتمال A و B را بخواهیم یعنی $A\cap B$**
- **$P(\varnothing)=۰$ یعنی احتمال مجموعهٔ تهی برابر با صفر است.**
- **$P(S)=۱$ یعنی احتمال مجموعهٔ S برابر با یك است. ( S مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن است)**
- **$۰ \le P(A) \le ۱$ ( A مجموعهٔ همهٔ پیشامدهای مطلوب است)**
- **برای هر دو مجموعهٔ A و B داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$**
- **اگر $A\subseteq B$ باشد آن‌گاه: $P(A)\le P(B)$**

**مثال** **اگر مجموعهٔ A پیشامد زوج آمدن عدد در پرتاب یک تاس و B پیشامد اعداد کوچک‌تر از ۵ باشد، با فرض این‌که فضای نمونه $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشد، مطلوب است: الف) احتمال آن‌که A یا B رخ دهد. ب) احتمال آن‌که هم A و هم B رخ دهد.**

**پاسخ:**

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(S)=۶$ و $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴\}$

الف) $P(A\cup B)=\dfrac{n(A\cup B)}{n(S)}=\dfrac{۵}{۶}$ و $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶\} \Rightarrow n(A\cup B)=۵$ ، ( $A\cup B$ یعنی A یا B)

ب) $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳}$ و $A\cap B=\{۲,۴\} \Rightarrow n(A\cap B)=۲$ ، ( $A\cap B$ یعنی هم A و هم B)